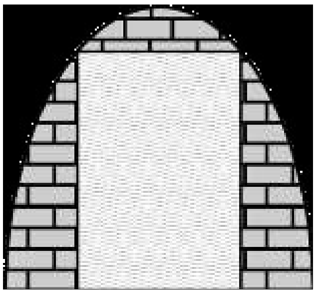
Problema 6. El corte vertical de la entrada a la plaza amurallada de cierto pueblo tiene forma de parábola con ecuación $y = -x^2 + 12$, donde x e y se miden en metros e $y = 0$ representa el suelo. Se desea poner una puerta rectangular de modo que las dos esquinas superiores estén en la parábola y las inferiores en el suelo. El resto de la entrada va cerrado con piedra. Calcular:



a) Calcular las dimensiones de la puerta para que tenga la mayor superficie posible. *(6 puntos)*

b) Utilizando la puerta del apartado anterior, obtener el área de la parte frontal de la puerta y el área de la parte frontal de la entrada recubierta de piedra. *(4 puntos)*

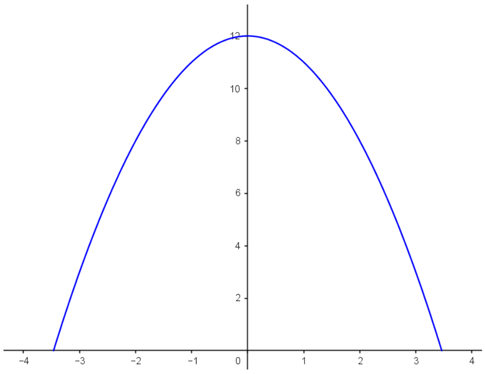
Solución:

Representemos gráficamente el problema:

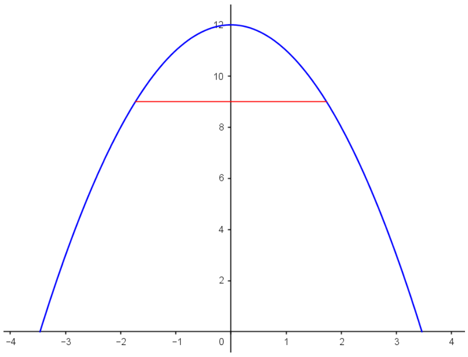
Parábola $y = -x^2 + 12$

$x = 0 \quad \rightarrow \quad y = 12$

$y = 0 \quad \rightarrow \quad -x^2 + 12 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 = 12 \quad \rightarrow \quad x = \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3} \cong \pm 3'4641$



La puerta rectangular a poner es este corte de la muralla tiene sus dos esquinas superiores en la parábola.



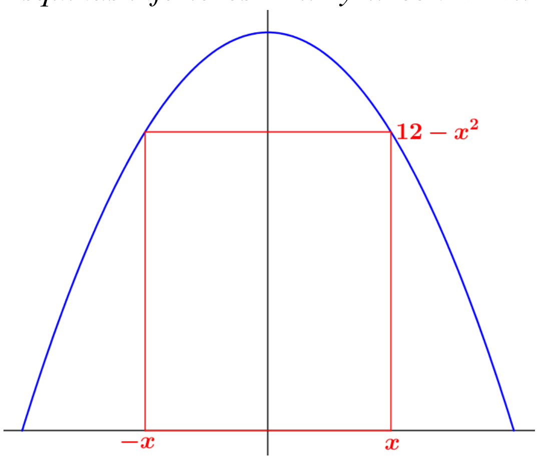
Fijadas las esquinas superiores, con $y \in [0,12]$, las esquinas inferiores de la puerta serán:

$\forall\ y \in [0,12] \quad \rightarrow \quad y = -x^2 + 12 \quad \rightarrow \quad x^2 = 12 - y \quad \rightarrow \quad x = \pm\sqrt{12 - y}$

Las esquinas inferiores quedan simétricas respecto del origen de coordenadas.

Para que los cálculos sean más sencillos utilizaremos los siguientes valores para las esquinas.

Esquinas inferiores $-x$ *y* x *con* $0 < x < 2\sqrt{3}$. *Esquinas superiores* $12 - x^2$. *Gráficamente:*



El área de la puerta es:

$A(x) = 2\,x\left(12 - x^2\right) = 24x - 2x^3$

$A(x) = 24x - 2x^3 \qquad 0 < x < 2\sqrt{3}$

a) Dimensiones de la puerta para que tenga la mayor superficie posible.

$A'(x) = 24 - 6x^2$

$24 - 6x^2 = 0; \quad 6x^2 = 24; \quad x^2 = 4; \quad x = \pm\sqrt{4} = \pm 2,$ *como* $0 < x < 2\sqrt{3}$, *entonces* $x = 2$.

$A''(x) = -12x; \quad A''(2) = -12 \cdot 2 = -24 < 0$, *por tanto en* $x = 2$ *hay un máximo relativo.*

Obtengamos el signo de A´(x) a la derecha e izquierda de x = 2.

$$A'(x) = 24 - 6x^2$$

$$x = 1´5 \quad \rightarrow \quad A'(1´5) = 24 - 6 \cdot 1´5^2 = 11´5 > 0 \quad \text{creciente}$$

$$x = 2´5 \quad \rightarrow \quad A'(2´5) = 24 - 6 \cdot 2´5^2 = -13´5 < 0 \quad \text{decreciente}$$

Por tanto, como A(x) es creciente a la izquierda de 2 y decreciente a su derecha el máximo relativo es absoluto.

Para $x = 2$, $y = 12 - 2^2 = 8$

Solución: para que la puerta tenga la mayor superficie posible sus dimensiones son de 4 m de base y 8 m de altura.

b) Utilizando la puerta del apartado anterior.

El área de la puerta del apartado anterior es: 8 x 4 = 32 m^2.

Calculemos el área del corte vertical, que es el área encerrada por la parábola.

$$\int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} \left(12 - x^2\right) dx = \left[12x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} = \left(12 \cdot 2\sqrt{3} - \frac{\left(2\sqrt{3}\right)^3}{3}\right) - \left(12 \cdot \left(-2\sqrt{3}\right) - \frac{-\left(2\sqrt{3}\right)^3}{3}\right) =$$

$$= 24\sqrt{3} - \frac{24\sqrt{3}}{3} - \left(-24\sqrt{3} - \frac{-24\sqrt{3}}{3}\right) = 24\sqrt{3} - \frac{24\sqrt{3}}{3} + 24\sqrt{3} - \frac{24\sqrt{3}}{3} = 48\sqrt{3} - \frac{48\sqrt{3}}{3} = 32\sqrt{3}$$

Solución: el área de la parte frontal de la puerta es 32 m^2 y el área de la parte frontal de la entrada recubierta de piedra es $\left(32\sqrt{3} - 32\right) m^2 \cong 23´4256\ m^2$.