Problema 1. Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales que depende de un parámetro real m:

$$-x+y+z=m$$
$$2x+my-z=3m$$
$$(m-1)x+3y-z=6+m$$

Se pide:

a) Discutir el sistema en función de los valores del parámetro m. *(6 puntos)*

b) Para los valores de m para los que el sistema es compatible indeterminado, encontrar la solución. *(4 puntos)*

Solución:

a)

La matriz ampliada de este sistema es: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & m \\ 2 & m & -1 & 3m \\ m-1 & 3 & -1 & 6+m \end{array}\right)$

A es una matriz 3x3, por tanto el máximo rango de A es 3.

A´ es una matriz 3x4, por tanto el máximo rango de A´ es 3.

Empezamos estudiando el rango de A

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & m & -1 \\ m-1 & 3 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} C_2+C_1 \\ = C_3+C_1 \\ \end{matrix} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & m+2 & 1 \\ m-1 & m+2 & m-2 \end{vmatrix} = \{desarrollando\ por\ la\ 1^a\ fila\} = -1 \begin{vmatrix} m+2 & 1 \\ m+2 & m-2 \end{vmatrix} =$$

$$= -((m+2)(m-2)-(m+2)) = -[(m+2)(m-2-1)] = -[(m+2)(m-3)]$$

$$-[(m+2)(m-3)] = 0; \quad \left\langle \begin{matrix} m+2=0 & \rightarrow & m=-2 \\ m-3=0 & \rightarrow & m=3 \end{matrix} \right.$$

Para m ≠ – 2 y m ≠ 3

$|A| \neq 0$ → ran(A) = 3, y como el máximo rango de A´ es 3 → ran(A) = ran(A´) = 3 = nº incógnitas, por lo que el sistema es compatible y determinado.

Para m = – 2

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 & -6 \\ -3 & 3 & -1 & 4 \end{array}\right)$$

Calculemos el rango de A

Sabemos que $|A| = 0$, estudiemos el rango de A,

$$En\ A, \quad \left. \begin{matrix} |-1| = -1 \neq 0 \\ \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1-2 = -1 \neq 0 \end{matrix} \right\} \rightarrow ran(A) = 2$$

Calculemos el rango de A´

Al menor anterior no nulo de A le añadimos la cuarta columna y tercera fila,

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -6 \\ -3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 4+4+18+6+6-8 = 30 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(A') = 3$$

Por lo tanto, ran(A) ≠ ran(A´), luego el sistema es incompatible.

Para m = 3

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 9 \\ 2 & 3 & -1 & 9 \end{array}\right)$$

En esta matriz F_2 y F_3 son iguales, podemos eliminar una de ellas (ambas ecuaciones son la misma). Queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 9 \end{array}\right)$$

A es una matriz 2x3, por tanto el máximo rango de A es 2.
A´ es una matriz 2x4, por tanto el máximo rango de A´ es 2.

Empezamos estudiando el rango de A

$$\text{En A,} \quad \left.\begin{array}{l} |-1| = -1 \neq 0 \\ \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -3 - 2 = -5 \neq 0 \end{array}\right\} \rightarrow ran(A) = 2$$

Como el máximo rango de A´ es 2 $\rightarrow$ ran(A) = ran(A´) = 2 < nº incógnitas, por lo que el sistema es compatible indeterminado.

Por tanto,

Para m ≠ – 2 y m ≠ 3 el sistema es compatible determinado
Para m = – 2 el sistema es incompatible y
Para m = 3 el sistema es compatible indeterminado

b) Solución para m = 3.

Del estudio realizado en el apartado anterior para m = 3 el sistema es compatible indeterminado y las ecuaciones e incógnitas principales (las del menor de orden 2 no nulo) son 1^a y 2^a y x e y.

El sistema a resolver es:

$$\begin{cases} -x + y = 3 - z \\ 2x + 3y = 9 + z \end{cases}$$

$$|A| = -5$$

Resolviendo por Cramer,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3-z & 1 \\ 9+z & 3 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{9 - 3z - 9 - z}{-5} = \frac{-4z}{-5} = \frac{4z}{5}; \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 3-z \\ 2 & 9+z \end{vmatrix}}{-5} = \frac{-9 - z - 6 + 2z}{-5} = \frac{-15 + z}{-5} = \frac{15 - z}{5}$$

$$\textbf{Si } \boldsymbol{m = 3}\textbf{, la solución es:} \begin{cases} x = \dfrac{4\lambda}{5} \\ y = \dfrac{15 - \lambda}{5} \qquad \lambda \in \Re \\ z = \lambda \end{cases}$$