Problema 2. Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 2m & m \\ 0 & m & 0 \\ m & 1 & m \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) Estudiar el rango de A en función del parámetro real m. *(3 puntos)*
b) Para $m = -1$, resolver la ecuación matricial $A X = B$. *(4 puntos)*
c) Para $m = -1$, calcular A^5. *(3 puntos)*

Solución:

a) Rango de A en función de m.

A es 3x3 por tanto el máximo rango de A es 3.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2m & m \\ 0 & m & 0 \\ m & 1 & m \end{vmatrix}=\{desarrollando\ por\ la\ 2^{a}\ fila\}=m\begin{vmatrix} 1 & m \\ m & m \end{vmatrix}=m(m-m^2)$$

$$m(m-m^2)=0 \rightarrow \begin{cases} m=0 \\ m-m^2=0 \rightarrow m(1-m)=0 \begin{cases} m=0 \\ 1-m=0 \rightarrow m=1 \end{cases} \end{cases}$$

Por lo tanto,

Si $m \neq 0$ y $m \neq 1$, ran(A) = 3.

Si $m = 0$,

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad Sabemos\ que\ |A|=0$$

$$como \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(A)=2$$

Si $m = 1$,

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad Sabemos\ que\ |A|=0$$

$$como \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(A)=2$$

Solución:

Si $m \neq 0$ y $m \neq 1$, ran(A) = 3.

Si $m = 0$ o $m = 1$, ran(A) = 2.

b) Para $m = -1$, resolver $A X = B$

Para $m = -1$ $(m \neq 0$ y $m \neq 1)$ $\rightarrow$ ran(A) = 3, por lo tanto existe la matriz inversa de A.

Obtendremos X de la siguiente forma: $A X = B$, multiplicando por la izquierda por A^{-1}, $A^{-1} A X = A^{-1} B$, $X = A^{-1} B$

Cálculo de A^{-1}

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad |A| = m\left(m - m^2\right)\Big|_{m=-1} = -1(-1-1) = 2$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{menores} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{adjuntos} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -3 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{traspuesta} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad \textit{Finalmente } A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Luego

$$X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1.1-3.0-1.0 & 1.0-3.1-1.0 \\ 0.1-2.0-0.0 & 0.0-2.1-0.0 \\ -1.1+1.0-1.0 & -1.0+1.1-1.0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -3/2 \\ 0 & -1 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Solución: $X = \begin{pmatrix} 1/2 & -3/2 \\ 0 & -1 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

c) Para $m = 0$, calcular A^5.

Para $m = 0$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad A^4 = A^2\, A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^5 = A^4\, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución: $A^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$