Problema 3. Se considera la recta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+2}{-1}$ y el plano π: $3x - my + z = 1$.

Se pide:

a) Determinar el valor del parámetro real m para que r y π sean paralelos. Obtener además los valores de m para los que el plano π contiene a la recta r. *(4 puntos)*

b) Para los valores de m del apartado anterior, hallar un plano paralelo a π que contenga a la recta r. *(3 puntos)*

c) Calcular en función de m, la distancia entre π y el punto $P(1, -1, -2)$. *(3 puntos)*

Solución:

a) ¿m? / r // π.

$r \,//\, \pi$ *si* $\vec{v}_r$ *(vector director de r) y* $\vec{n}_\pi$ *(vector perpendicular a π) son perpendiculares.*

$\vec{v}_r(2,3,-1)$ y $\vec{n}_\pi(3,-m,1)$. $\quad \vec{v}_r \perp \vec{n}_\pi \to \vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi = 0;$

$(2,3,-1)\cdot(3,-m,1) = 0; \quad 6-3m-1=0; \quad 5-3m=0; \quad 5=3m; \quad m=\frac{5}{3}$

Para que r y π sean paralelos $m = \frac{5}{3}$.

¿m? / r ⊂ π.

Para que $r \subset \pi$ *deben cumplirse dos condiciones:* $P_r(1,-1,-2) \in \pi$ *y que* $\vec{v}_r \perp \vec{n}_\pi$.

Como hemos obtenido anteriormente, $\vec{v}_r \perp \vec{n}_\pi$ *si* $m = \frac{5}{3}$.

$P_r(1,-1,-2) \in \pi$, *sustituyendo las coordenadas de* P_r *en* π: $3 \cdot 1 - m(-1) + (-2) = 1;$
$3 + m - 2 = 1; \quad m + 1 = 1; \quad m = 0.$

Hemos obtenido dos valores de m distintos, por lo que la recta r no está contenida en el plano π.

No existe valor de m para el que el plano π contiene a la recta r.

b) Para $m = \frac{5}{3}$ *¿plano σ? / σ // π y r ⊂ σ.*

Para $m = \frac{5}{3} \;\to\; \pi: 3x - \frac{5}{3}y + z = 1 \;\to\; \pi: 9x - 5y + 3z = 3$

Como $\sigma \,//\, \pi \to \sigma: 9x - 5y + 3z = D$

Para que $r \subset \sigma \to P_r(1,-1,-2) \in \sigma \to 9 \cdot 1 - 5 \cdot (-1) + 3 \cdot (-2) = D \to 9 + 5 - 6 = D \to D = 8$

La ecuación del plano pedido es: 9 x – 5 y + 3 z = 8.

c) P(1,-2,-2) y π: 3 x – m y + z = 1, ¿d(P,π)?

$$d(P,\pi) = \frac{|3\cdot 1 - m(-1) + (-2)\cdot 1|}{\sqrt{3^2+m^2+1^2}} = \frac{|3+m-3|}{\sqrt{m^2+10}} = \frac{|m|}{\sqrt{m^2+10}}$$

Solución: $d(P,\pi) = \frac{|m|}{\sqrt{m^2+10}}$