Problema 4. Un cuadrado tiene dos vértices consecutivos en los puntos P = (2,1,3) y Q = (1,3,1) y los otros dos sobre una recta r que pasa por el punto R = (4,7,6).

a) Calcular la ecuación de la recta r. *(2 puntos)*
b) Calcular la ecuación del plano que contiene al cuadrado. *(3 puntos)*
c) Hallar las coordenadas de los otros dos vértices. *(5 puntos)*

Solución:
a) ¿recta r?

Como la recta r es la que contiene los otros dos vértices del cuadrado será paralela a la que pasa por P y Q. Por tanto de la recta r sabemos $\begin{cases} \text{punto} \quad R(4,7,6) \\ \text{vector director } \vec{v}_r = \overrightarrow{PQ} = (-1,2,-2) \end{cases}$

La ecuación vectorial de r: $\begin{cases} x = 4 - \lambda \\ y = 7 + 2\lambda \quad \lambda \in \Re \\ z = 6 - 2\lambda \end{cases}$

La ecuación continua de r: $\dfrac{x-4}{-1} = \dfrac{y-7}{2} = \dfrac{z-6}{-2}$

b) ¿Plano π*? /* $\pi \subset$ *cuadrado*

π *será el plano que contenga los punto P, Q y R.*

Por tanto del plano π *sabemos* $\begin{cases} \text{punto} \quad P(2,1,3) \\ \text{vectores directores} \left\langle \begin{matrix} \overrightarrow{PQ} \ (-1,2,-2) \\ \overrightarrow{PR} \ (2,6,3) \end{matrix} \right. \end{cases}$

La ecuación del plano π *la obtenemos a partir de:*

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-3 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 0; \quad (x-2)\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} - (y-1)\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + (z-3)\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

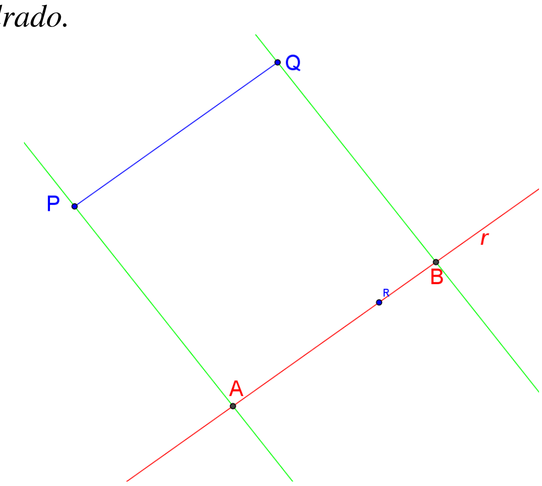
$$(x-2)\,(6+12) - (y-1)\,(-3+4) + (z-3)\,(-6-4) = 0; \quad 18\,(x-2) - (y-1) - 10(z-3) = 0$$

$$18x - 36 - y + 1 - 10z + 30 = 0; \quad 18x - y + 10z - 5 = 0$$

Solución: la ecuación del plano pedido es 18 x – y – 10 z – 5 = 0.

c) Coordenadas de los otros dos vértices del cuadrado.

El problema a resolver expresado de forma gráfica (en el plano en lugar del espacio) es:



Cálculo del vértice A.

Calculamos el plano que contiene al punto P y es perpendicular a la recta r (plano σ). El vértice A será el punto de corte entre el plano σ y la recta r.

Representamos por $\vec{n}_\sigma$ *el vector perpendicular al plano* σ.

Como $\sigma \perp r \quad \rightarrow \quad \vec{n}_\sigma = \vec{v}_r = (-1,2,-2)$

La ecuación del plano σ *será:* $-x + 2y - 2z + D = 0$

Como el punto $P(2,1,3) \in \sigma \quad \rightarrow \quad -2 + 2 \cdot 1 - 2 \cdot 3 + D = 0;\ -6 + D = 0;\quad D = 6$

Luego $\sigma: -x + 2y - 2z + 6 = 0$

Punto de corte entre σ *y r.*

Sustituyendo los valores de x, y, z de r en la ecuación del plano:

$-(4-\lambda) + 2(7+2\lambda) - 2(6-2\lambda) + 6 = 0;\quad -4 + \lambda + 14 + 4\lambda - 12 + 4\lambda + 6 = 0;\quad 4 + 9\lambda = 0$

$$\lambda = \frac{-4}{9} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = 4 - \dfrac{-4}{9} = \dfrac{40}{9} \\ y = 7 + 2\left(\dfrac{-4}{9}\right) = \dfrac{55}{9} \\ z = 6 - 2\left(\dfrac{-4}{9}\right) = \dfrac{62}{9} \end{cases} \quad \rightarrow \quad A\left(\frac{40}{9}, \frac{55}{9}, \frac{62}{9}\right)$$

Cálculo del vértice B.

Calculamos el plano que contiene al punto Q y es perpendicular a la recta r (plano δ). El vértice B será el punto de corte entre el plano δ y la recta r.

Representamos por $\vec{n}_\delta$ *el vector perpendicular al plano* δ.

Como $\delta \perp r \quad \rightarrow \quad \vec{n}_\delta = \vec{v}_r = (-1,2,-2)$

La ecuación del plano δ *será:* $-x + 2y - 2z + D = 0$

Como el punto $Q(1,3,1) \in \delta \quad \rightarrow \quad -1 + 2 \cdot 3 - 2 \cdot 1 + D = 0;\ 3 + D = 0;\quad D = -3$

Luego $\delta: -x + 2y - 2z - 3 = 0$

Punto de corte entre δ *y r.*

Sustituyendo los valores de x, y, z de r en la ecuación del plano:

$-(4-\lambda) + 2(7+2\lambda) - 2(6-2\lambda) - 3 = 0;\quad -4 + \lambda + 14 + 4\lambda - 12 + 4\lambda - 3 = 0;\quad 9\lambda - 5 = 0$

$$\lambda = \frac{5}{9} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = 4 - \dfrac{5}{9} = \dfrac{31}{9} \\ y = 7 + 2\left(\dfrac{5}{9}\right) = \dfrac{73}{9} \\ z = 6 - 2\left(\dfrac{5}{9}\right) = \dfrac{44}{9} \end{cases} \quad \rightarrow \quad B\left(\frac{31}{9}, \frac{73}{9}, \frac{44}{9}\right)$$

Solución: los otros dos vértices del cuadrado son $A\left(\frac{40}{9}, \frac{55}{9}, \frac{62}{9}\right)$ *y* $B\left(\frac{31}{9}, \frac{73}{9}, \frac{44}{9}\right)$.