Problema 5. Sea la función $f(x)=\dfrac{k\,x}{e^{2x}}$ donde k es un parámetro real . Se pide:

a) Obtener el dominio y las asíntotas de *f(x)*. *(3 puntos)*
b) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f(x)* y sus máximos y mínimos. *(5 puntos)*
c) Justificar que la función siempre se anula en algún punto del intervalo [– 1, 1]. *(2 puntos)*

Solución:
Como k es un parámetro real, si k = 0 f(x) = 0 y las respuestas a los tres apartados son inmediatas:
a) Dom f(x) = $\Re$, f(x) no tiene asíntotas.
b) f(x) es una función constante por tanto no es ni creciente ni decreciente y no tiene ni máximos ni mínimos.
c) f(x) es nula para cualquier valor de x por tanto f(x) se anula en cualquier punto del intervalo [– 1, 1].

A continuación resolvemos el ejercicio considerando k ≠ 0.

a) $f(x)=\dfrac{k\,x}{e^{2x}}$

$e^{2x}\neq 0 \;\; \forall\, x\in\Re \quad \rightarrow \quad Dom\, f(x) = \Re.$

Asíntotas.
Como Dom f(x) = $\Re$ → f(x) no tiene asíntotas verticales.

Asíntota horizontal:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{k\,x}{e^{2x}}=\frac{\infty}{0}=\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{k\,x}{e^{2x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\{\text{como } e^{2x} \text{ es un infinito de orden superior a } kx\} = 0$$

La asíntota horizontal es y = 0 en +∞.

Asíntota oblicua: (y = m x + n)

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{k\,x}{e^{2x}}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{k}{e^{2x}}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{k}{e^{2x}}=\dfrac{k}{0}=\infty\\[2ex] \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{k}{e^{2x}}=\dfrac{k}{\infty}=0\end{cases} \quad\rightarrow\quad \text{No hay asíntota oblicua.}$$

Luego f(x) sólo tiene asíntota horizontal y = 0 en +∞.

b) Monotonía y máximos y mínimos de y = f(x)

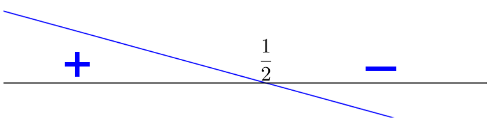
$$f'(x)=\frac{k\,e^{2x}-k\,x\,e^{2x}\,2}{\left(e^{2x}\right)^2}=\frac{k\,e^{2x}\,(1-2x)}{e^{4x}}$$

Estudiemos el signo de f´(x),

$\forall x\in\Re \quad e^{2x}$ *y* $e^{4x}>0 \quad\rightarrow\quad$ *el signo de f´(x) depende de la expresión k (1 – 2 x)*

1 – 2 x es un polinomio de primer grado (una línea recta) de pendiente negativa y raíz: 1 – 2 x = 0;

$1 = 2\,x;\quad x=\dfrac{1}{2}.$ *Gráficamente*



En consecuencia:

si $k > 0$ f(x) es creciente en $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ ***y decreciente en*** $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ ***y tiene un máximo en*** $\left(\frac{1}{2}, \frac{k}{2e}\right)$**.**

$$x = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad f(x) = \frac{k\,\frac{1}{2}}{e^{2\frac{1}{2}}} = \frac{k}{2e}$$

si $k < 0$ f(x) es decreciente en $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ ***y creciente en*** $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ ***y tiene un mínimo en*** $\left(\frac{1}{2}, \frac{k}{2e}\right)$**.**

c) Justificar que f(x) se anula en algún punto del intervalo [– 1 , 1]

Como Dom f(x) = $\Re$ → f(x) es continua en $\Re$ → f(x) es continua en [– 1 , 1]

$$f(-1) = \frac{k\,(-1)}{e^{2\,(-1)}} = \frac{-k}{e^{-2}} = -k\,e^2$$

$$f(1) = \frac{k \cdot 1}{e^{2\cdot 1}} = \frac{k}{e^2}$$

$$\rightarrow \quad f(-1) \cdot f(1) = -k\,e^2\,\frac{k}{e^2} = \left\{e^2 \neq 0\right\} = -k^2 < 0$$

Se cumplen las condiciones del teorema de Bolzano:

f(x) es continua en [– 1 , 1] y f(– 1) . f(1) < 0 → ***∃ c ∈ (– 1 , 1) / f(c) = 0***