Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 6. Sea el rectángulo R definido por los puntos del plano (– 1,0), (1,0), (1,1) y (– 1, 1). Se consideran las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = a$, $0 < a < 1$, contenidas dentro de R. Obtener el valor de a que cumple que el área comprendida entre dichas gráficas es igual a un tercio del área de R. *(10 puntos)*

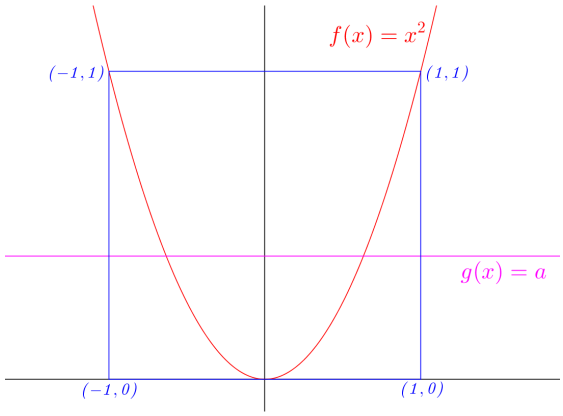
Solución:

La representación gráfica del problema es:

f(x) es una parábola

$f(x) = x^2$

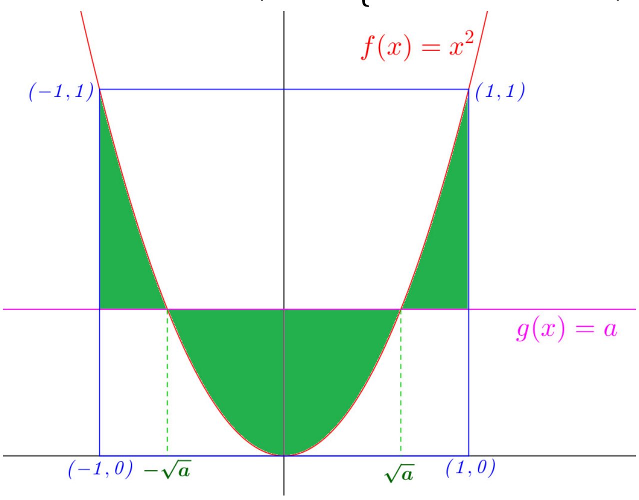
x	$f(x)$
-1	1
0	0
1	1



El área del rectángulo R es {la base mide 2 y la altura 1} $A_R = 2.1 = 2$

Para calcular el área entre las funciones $f(x)$ y $g(x)$ necesitamos obtener sus puntos de corte:

$x^2 = a \quad \to \quad x = \pm\sqrt{a} \qquad \{como\ 0 < a < 1 \quad \exists \sqrt{a}\}$



El área comprendida entre las gráficas de las funciones f(x) y g(x) dentro de R son las zonas coloreadas del dibujo.

Como las dos funciones son simétricas respecto del eje OY, el cálculo de esta área lo obtenemos como sigue:

$$A = 2\left[\int_0^{\sqrt{a}} \left(a - x^2\right) dx + \int_{\sqrt{a}}^{1} \left(x^2 - a\right) dx\right] =$$

$$= 2\left[\left[a\,x - \frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{a}} + \left[\frac{x^3}{3} - a\,x\right]_{\sqrt{a}}^{1}\right] =$$

$$= 2\left[\left(a\sqrt{a} - \frac{\left(\sqrt{a}\right)^3}{3}\right) - (0-0) + \left(\frac{1^3}{3} - a\cdot 1\right) - \left(\frac{\left(\sqrt{a}\right)^3}{3} - a\sqrt{a}\right)\right] = 2\left(\sqrt{a^3} - \frac{\sqrt{a^3}}{3} + \frac{1}{3} - a - \frac{\sqrt{a^3}}{3} + \sqrt{a^3}\right) =$$

$$= 2\left(2\sqrt{a^3} - \frac{2\sqrt{a^3}}{3} + \frac{1}{3} - a\right) = 2\left(\frac{4\sqrt{a^3}}{3} + \frac{1}{3} - a\right) = \frac{8\sqrt{a^3}}{3} + \frac{2}{3} - 2\,a$$

Debe cumplirse que el área comprendida entre dichas gráficas es igual a un tercio del área de R $\to$

$$A = \frac{1}{3} A_R \quad \to \quad \frac{8\sqrt{a^3}}{3} + \frac{2}{3} - 2\,a = \frac{1}{3}2; \quad \frac{8\sqrt{a^3}}{3} - 2\,a = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}; \quad \frac{8\sqrt{a^3}}{3} - 2\,a = 0; \quad \frac{8\sqrt{a^3}}{3} = 2\,a;$$

$$\frac{8\sqrt{a^3}}{2} = 3\,a; \quad 4\sqrt{a^3} = 3a; \quad \left(4\sqrt{a^3}\right)^2 = (3a)^2; \quad 16\,a^3 = 9\,a^2; \quad 16\,a^3 - 9\,a^2 = 0; \quad a^2\,(16a - 9) = 0$$

$$\begin{cases} a^2 = 0; \quad a = 0 \\ 16a - 9 = 0; \quad 16a = 9; \quad a = \dfrac{9}{16} \end{cases} \qquad \text{como } 0 < a < 1 \quad \rightarrow \quad a = \frac{9}{16}$$

Como en el proceso de resolución de la ecuación hemos elevado al cuadrado, comprobemos que la solución verifica la ecuación inicial:

$$4\sqrt{a^3} = 3a; \quad 4\sqrt{\left(\frac{9}{16}\right)^3} = 3\,\frac{9}{16}; \quad \frac{27}{16} = \frac{27}{16} \qquad a = \frac{9}{16} \text{ es solución.}$$

Solución: el valor de a buscado es $\dfrac{16}{9}$.