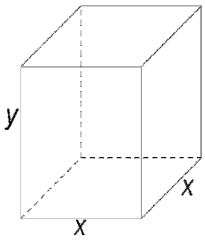
4.1 Una empresa de paquetería quiere diseñar distintos modelos de cajas. Uno de esos modelos consiste en una caja de 80 cm^3 de volumen, con base y tapa cuadradas. El precio del material de las paredes laterales es de 1 céntimo por cm^2. La base y tapa se construirán con un material de calidad superior a las caras laterales de la caja, siendo éste un 25% más caro. Obtener:

4.1.1 **(0.75 puntos)** La función $P(x)$ que proporciona el precio del material de la caja en función del lado de la base x.

4.1.2 **(1.25 puntos)** Las dimensiones de la caja para que la función $P(x)$ tenga el menor valor posible.

4.1.3 **(0.75 puntos)** El precio del material en el caso anterior.

Solución:

El modelo de caja a diseñar es: 

de 80 cm^3 de volumen.

El coste del material de las paredes laterales es 1 cent/cm^2 y

El coste del material de la base y la tapa es (un 25% más caro) 1´25 . 1 cent/cm^2 = 1´25 cent/cm^2

4.1.1 Obtener la función P(x) que proporciona el precio del material de la caja en función del lado de la base x.

El área lateral de la caja es $4xy$, el área de la base y tapa es: $2x^2$

El precio del material de la caja sería: $1 \cdot 4xy + 1{,}25 \cdot 2x^2 = 4xy + 2{,}5x^2$

Para tener la expresión anterior sólo en función de x debemos buscar una relación entre x e y.

$$V_{caja} = x^2 y; \quad x^2 y = 80; \quad y = \frac{80}{x^2} \quad \rightarrow \quad P(x) = 2{,}5\, x^2 + 4x\frac{80}{x^2} = 2{,}5\, x^2 + \frac{320}{x}$$

Como x es el lado de la base, $x > 0$.

Por tanto, $\mathbf{P(x) =}\ 2{,}5\, x^2 + \dfrac{320}{x} \quad x > 0.$

4.1.2 Las dimensiones de la caja para que la función P(x) tenga el menor valor posible.

Debemos calcular el mínimo de P(x)

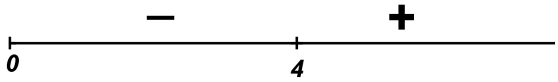
$$P'(x) = 5x - \frac{320}{x^2}$$

$$P'(x) = 0; \quad 5x - \frac{320}{x^2} = 0; \quad 5x^3 - 320 = 0; \quad 5x^3 = 320; \quad x^3 = \frac{320}{5}; \quad x^3 = 64; \quad x = \sqrt[3]{64} = 4$$

Calculemos el signo de P´(x) a la izquierda y derecha de x = 4,

$$P'(1) = 5 \cdot 1 - \frac{320}{1^2} = -315 < 0$$

$$P'(5) = 5 \cdot 5 - \frac{320}{5^2} = 12{,}2 > 0$$



En x = 4 hay un mínimo local. Como a la izquierda de x = 4 la función es decreciente y a su derecha creciente este mínimo local es el absoluto de P(x).

Para $x = 4, \quad y = \frac{80}{4^2} = 5.$

Para que P(x) tenga el menor valor posible las dimensiones de la caja deben ser: lado de la base 4 cm y altura de la caja 5 cm.

4.1.3 El precio del material en el caso anterior.

$$P(4) = 2{\acute{}}5\ 4^2 + \frac{320}{4} = 120 \equiv 120\ cent \equiv 1{\acute{}}20\text{€}.$$

Para la caja obtenida en el apartado anterior el precio del material es de 1´20 €.