4.2 Responda a todos los subapartados siguientes:

Una ventana Norman está formada por un rectángulo y un semicírculo. El semicírculo está apoyado sobre el lado horizontal superior del rectángulo, que coincide con el diámetro horizontal del semicírculo.

La base del rectángulo mide *x* y su altura mide *y*, por lo que el diámetro del semicírculo mide *x*.

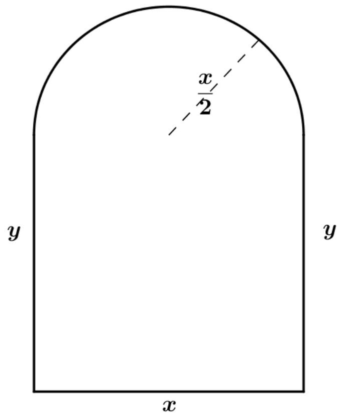
Obtener:

4.2.1 **(1 punto)** La expresión $S(x)$ que da el área de una ventana Norman de perímetro 5 metros en función de su anchura *x*.

4.2.2 **(1.5 puntos)** El valor de *x* para el que la función $S(x)$ tenga un máximo relativo y el valor de dicha área máxima.

Solución:

La anchura de la ventana es x, la altura de la parte rectangular y, el radio del semicírculo superior es x/2.



El perímetro de la ventana es de 5m.

La longitud del semicírculo es: $\pi \frac{x}{2}$.

El perímetro de la ventana es: $x + 2y + \frac{\pi}{2}x$

Como hay que obtener el área de la ventana en función de x, despejemos y:

$x + 2y + \frac{\pi}{2}x = 5; \quad 2y = 5 - x - \frac{\pi}{2}x; \quad y = \frac{5}{2} - \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}x$

4.2.1) Área de la ventana,

Área de la ventana = Área del rectángulo (xy) + Área del semicírculo $\left(\frac{\pi r^2}{2}\right)$,

$$S(x) = x\left(\frac{5}{2} - \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}x\right) + \frac{\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2} = \frac{5}{2}x - \frac{x^2}{2} - \frac{\pi}{4}x^2 + \frac{\pi\frac{x^2}{4}}{2} = \frac{5}{2}x - \frac{x^2}{2} - \frac{\pi}{4}x^2 + \frac{\pi}{8}x^2 = \frac{5}{2}x - \frac{x^2}{2} - \frac{\pi}{8}x^2$$

Como x e y son longitudes, x, y > 0 (si alguna es 0 no hay ventana), por tanto $\frac{5}{2} - \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}x > 0$,

$$\frac{5}{2} > \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}x, \quad \frac{5}{2} > \frac{2x + \pi x}{4}, \quad \frac{5}{2} > \frac{(2+\pi)x}{4}, \quad 10 > (2+\pi)x; \quad x < \frac{10}{2+\pi} \cong 1'9449$$

Finalmente, el área de la ventana Norman de perímetro 5 metros en función de su anchura, x, es

$$S(x) = \frac{5}{2}x - \frac{x^2}{2} - \frac{\pi}{8}x^2 \qquad x \in \left(0, \frac{10}{2+\pi}\right)$$ ***x en metros.***

4.2.2) El valor de x para el que la función S(x) tenga un máximo relativo y el valor de dicha área máxima.

Buscamos el área máxima.

$$S'(x) = \frac{5}{2} - x - \frac{\pi}{4}x = \frac{5}{2} - \left(1 + \frac{\pi}{4}\right)x$$

$$S'(x) = 0 \quad \to \quad \frac{5}{2} - \left(1 + \frac{\pi}{4}\right)x = 0; \quad \frac{5}{2} = \left(1 + \frac{\pi}{4}\right)x; \quad \frac{5}{2} = \frac{4+\pi}{4}x; \quad x = \frac{10}{4+\pi} \cong 1'40025 \in \left(0, \frac{10}{2+\pi}\right)$$

Como $S'(x)$ es un polinomio de primer grado con coeficiente de x negativo, es una recta de pendiente negativa, entonces a la izquierda de su raíz es positiva y a la derecha negativa.

En $x = \dfrac{10}{4+\pi}$ *hay un máximo relativo.*

Valor del área máxima.

$$S(x) = \frac{5}{2}x - \frac{x^2}{2} - \frac{\pi}{8}x^2$$

$$para \quad x = \frac{10}{4+\pi} \quad \rightarrow \quad S\left(\frac{10}{4+\pi}\right) = \frac{5}{2}\,\frac{10}{4+\pi} - \frac{\left(\frac{10}{4+\pi}\right)^2}{2} - \frac{\pi}{8}\left(\frac{10}{4+\pi}\right)^2 = \frac{25}{4+\pi} - \frac{\frac{100}{(4+\pi)^2}}{2} - \frac{100\,\pi}{8\,(4+\pi)^2} =$$

$$= \frac{25}{4+\pi} - \frac{50}{(4+\pi)^2} - \frac{25\,\pi}{2\,(4+\pi)^2} = \frac{2\cdot 25\,(4+\pi) - 2\cdot 50 - 25\,\pi}{2\,(4+\pi)^2} = \frac{200 + 50\,\pi - 100 - 25\,\pi}{2\,(4+\pi)^2} = \frac{100 + 25\,\pi}{2\,(4+\pi)^2} =$$

$$= \frac{25\,(4+\pi)}{2\,(4+\pi)^2} = \frac{25}{2\,(4+\pi)} \cong 1'7503$$

El valor de x para el que la función S(x) tenga un máximo relativo es $\dfrac{10}{4+\pi}\,m \cong 1'40025\ m$ ***y el valor de dicha área máxima es*** $\dfrac{25}{2\,(4+\pi)}\,m^2 \cong 1'7503\ m^2$**.**