2.1 Una empresa de producción agrícola desarrolla fertilizantes que combinan tres nutrientes esenciales: nitrógeno (N), fósforo (P) y potasio (K). Se representan por x, y, z las cantidades en kilogramos a usar por lote de N, P, K, respectivamente. Estas cantidades deben cumplir las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} 3x+4y+\alpha z=30 \\ -2x+y+z=4 \\ 2x-y+\alpha z=10 \end{cases}$$

donde α es un parámetro real.

2.1.1 **(1.25 puntos)** Discutir, en función del parámetro α, el sistema de ecuaciones anterior.

2.1.2 **(1.25 puntos)** Obtener las cantidades x, y, z en el caso de que el sistema sea compatible.

Solución:
2.2.1

La matriz ampliada de este sistema es: $A'=\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & \alpha & 30 \\ -2 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & \alpha & 10 \end{array}\right)$

A es una matriz 3x3, por tanto el máximo rango de A es 3. A´ es una matriz 3x4, por tanto el máximo rango de A´ es 3.
Empezamos estudiando el rango de A

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & \alpha \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & \alpha \end{vmatrix} = 3\alpha+2\alpha+8-2\alpha+3+8\alpha=11\alpha+11$$

$$11\alpha+11=0; \quad 11\alpha=-11 \quad \rightarrow \quad \alpha=\frac{-11}{11}=-1$$

Si $\alpha\neq-1$

$|A|\neq 0 \rightarrow$ *ran(A) = 3, y como el máximo rango de A´ es 3* $\rightarrow$ *ran(A) = ran(A´) = 3 = nº incógnitas, por lo que el sistema es compatible y determinado.*

Si $\alpha=-1$

$$A'=\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & -1 & 30 \\ -2 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 10 \end{array}\right)$$

Sabemos que $|A|=0$*, estudiemos el rango de A,* $\left.\begin{array}{l} |a_{11}|=|3|=3\neq 0 \\ \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=3+8=11\neq 0 \end{array}\right\} \rightarrow ran(A)=2$

En A´, a partir del menor no nulo de orden 2 anterior formamos el menor de orden 3 añadiéndole la 3ª fila y 4ª columna:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 30 \\ -2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 10 \end{vmatrix} = 30+60+32-60+12+80=154\neq 0 \quad \rightarrow \quad ran\ (A') = 3$$

Por lo tanto, ran(A) = 2 $\neq$ *3 = ran(A´), luego el sistema es incompatible.*

Solución, **si** $\boldsymbol{\alpha\neq-1}$***, el sistema es compatible determinado;***
si $\boldsymbol{\alpha=-1}$***, el sistema es incompatible.***

2.2.2 El sistema es compatible (determinado) para $\alpha \neq -1$.

El sistema a resolver es: $\begin{cases} 3x+4y+\alpha z=30 \\ -2x+y+z=4 \\ 2x-y+\alpha z=10 \end{cases}$

$|A| = 11\alpha + 11, \qquad \{\alpha \neq -1 \quad \rightarrow \quad 11\alpha + 1 \neq 0\}$

Resolviendo por Cramer,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 30 & 4 & \alpha \\ 4 & 1 & 1 \\ 10 & -1 & \alpha \end{vmatrix}}{11\alpha+11} = \frac{30\alpha - 4\alpha + 40 - 10\alpha + 30 - 16\alpha}{11\alpha+11} = \frac{70}{11\alpha+11}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 30 & \alpha \\ -2 & 4 & 1 \\ 2 & 10 & \alpha \end{vmatrix}}{11\alpha+11} = \frac{12\alpha - 20\alpha + 60 - 8\alpha - 30 + 60\alpha}{11\alpha+11} = \frac{30+44\alpha}{11\alpha+11}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 4 & 30 \\ -2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 10 \end{vmatrix}}{11\alpha+11} == \frac{154}{11\alpha+11} = \frac{11\cdot 14}{11(\alpha+1)} = \frac{14}{\alpha+1}$$

Si $\alpha \neq -1$, la solución es: $\begin{cases} x = \dfrac{70}{11\alpha+11} \\ y = \dfrac{30+44\alpha}{11\alpha+11} \\ z = \dfrac{14}{\alpha+1} \end{cases}$