2.1 Una empresa de ingeniaría estructural está diseñando un sistema de soporte para un edificio que depende de un parámetro real m relacionado con la resistencia de uno de los materiales empleados. Para garantizar la estabilidad de la estructura, es necesario analizar una matriz que representa las relaciones entre fuerzas internas y externas en los puntos de unión de la estructura.

Para este análisis, se considera la siguiente matriz de rigidez:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

donde m representa el coeficiente de resistencia ajustable del material en uno de los puntos de unión.

Asimismo, se cuenta con un vector de cargas externas y un vector de desplazamientos iniciales:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad y \quad F = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

La estabilidad y respuesta de la estructura dependen de las propiedades de la matriz D y de su relación con los vectores E y F. Se pide:

2.1.1 **(0.5 puntos)** Indicar, si existen, los valores del parámetro m para los que D tiene inversa.

2.1.2 **(0.5 puntos)** Si la estabilidad del sistema dependiera de que la matriz D^2 es invertible, explica razonadamente si hay algún valor de m que ponga en riesgo la estabilidad del sistema sin necesidad de resolver toda la ecuación matricial.

2.1.3 **(0´5 puntos)** Calcular las matrices $E\,F$ y $(F\,E)^t$, si existen.

2.1.4 **(1 punto)** Resolver, para $m = 0$, la ecuación matricial con incógnita X:

$$\frac{1}{2}X + D = D^{-1}.$$

Solución:

2.1.1 $¿m? / \ \exists\, D^{-1}$.

$$\exists\, D^{-1} \quad si \quad |D| \neq 0.$$

$$|D| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -m^2 - 1$$

$$-m^2 - 1 = 0; \qquad m^2 = -1; \qquad m = \pm\sqrt{-1} \ no \ tiene \ soluciones \ reales$$

Por lo tanto, ***la matriz D tiene inversa para cualquier valor de m.***

2.1.2 Si la estabilidad del sistema dependiera de que la matriz D^2 es invertible, explica razonadamente si hay algún valor de m que ponga en riesgo la estabilidad del sistema sin necesidad de resolver toda la ecuación matricial.

D^2 es invertible si $/D^2/ \neq 0$.

Ahora bien, $/D^2/ = /D/^2$ = (calculado en el apartado anterior) = $\left(-m^2 - 1\right)^2$

El valor de m que ponga en riesgo la estabilidad del sistema será solución de /D²/ = 0; $\left(-m^2-1\right)^2=0$;

$-m^2-1=0$; *(resuelto en el apartado anterior) No tiene soluciones.*

Por lo tanto, ***no existe valor de m que ponga en riesgo la estabilidad del sistema.***

2.1.3 Calcular las matrices E F y (F E)^t, si existen.

E es una matriz 1x3 y F es 3x1, luego existe EF que será 1x1.

$$EF=\begin{pmatrix}1 & 4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=\left(1\cdot 1+4\cdot 2+3\cdot(-1)\right)=(6)$$

F es una matriz 3x1 y E es 1x3, luego existe FE que será 3x3 y también existirá (F E)^t.

$$FE=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 4 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 4 & 3\\2 & 8 & 6\\-1 & -4 & -3\end{pmatrix}\quad\rightarrow\quad(FE)^t=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\4 & 8 & -4\\3 & 6 & -3\end{pmatrix}$$

Solución: EF = (6) y $(FE)^t=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\4 & 8 & -4\\3 & 6 & -3\end{pmatrix}$**.**

2.1.4 Resolver, para m = 0, $\frac{1}{2}X+D=D^{-1}$.

Para m = 0, en el apartado 2.1.1, hemos obtenido que existe D^{-1}.

Despejemos X:

$$\frac{1}{2}X+D=D^{-1};\quad \frac{1}{2}X=D^{-1}-D;\quad X=2\left(D^{-1}-D\right)$$

Cálculo de D^{-1}:

$$D=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & -1\\2 & -1 & 1\end{pmatrix},\quad |D|=\left(-m^2-1\right)_{m=0}=-1$$

$$D=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & -1\\2 & -1 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{menores}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}0 & -1\\-1 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0 & -1\\2 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0 & 0\\2 & -1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}0 & 0\\-1 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 0\\2 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 0\\2 & -1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}0 & -1\\0 & -1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\0 & 1 & -1\\0 & -1 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{adjuntos}\begin{pmatrix}-1 & -2 & 0\\0 & 1 & 1\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{traspuesta}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\-2 & 1 & 1\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}.\quad \textit{Finalmente } D^{-1}=\frac{1}{|D|}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\-2 & 1 & 1\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\-2 & 1 & 1\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\2 & -1 & -1\\0 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

Luego, $X = 2\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\right] = 2\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Solución: $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.