3.1 Dados los planos $\pi_1: 2x - a^2 y - az = a - 1$ y $\pi_2: (a-1)x - ay - z = a$, se pide:

3.1.1 **(1.5 puntos)** Analizar en función de a la posición relativa de los dos planos.

3.1.2 **(0.5 puntos)** Calcular, para $a = 0$, el ángulo entre los dos planos.

3.1.3 **(0.5 puntos)** Calcular, para $a = 0$, la distancia del punto $P = (1, 0, -1)$ y el plano π_1.

Solución:

3.1.1 Analizar en función de a la posición relativa de lo dos planos.

π_1 coincidente con π_2.

Debe cumplirse que $\frac{2}{a-1} = \frac{-a^2}{-a} = \frac{-a}{-1} = \frac{a-1}{a}$; $\frac{2}{a-1} = \frac{a^2}{a} = \frac{a}{1} = \frac{a-1}{a}$ *esto da lugar a tres ecuaciones:*

$$\begin{cases} \frac{2}{a-1} = \frac{a^2}{a} \\ \frac{2}{a-1} = \frac{a}{1} \\ \frac{2}{a-1} = \frac{a-1}{a} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2a = a^3 - a^2 \\ 2 = a^2 - a \\ 2a = (a-1)^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a^3 - a^2 - 2a = 0 \\ a^2 - a - 2 = 0 \\ 2a = a^2 - 2a + 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a\left(a^2 - a - 2\right) = 0 \\ a^2 - a - 2 = 0 \\ a^2 - 4a + 1 = 0 \end{cases}$$

Resolvamos cada una de las ecuaciones,

$$a\left(a^2 - a - 2\right) = 0 \quad \left\langle \begin{array}{l} a_1 = 0 \\ a^2 - a - 2 = 0; \quad a = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 3}{2} = \left\langle \begin{array}{l} a_2 = \frac{1+3}{2} = 2 \\ a_3 = \frac{1-3}{2} = -1 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$a^2 - a - 2 = 0; \quad ya\ \ resuelta: \quad a_2 = 2 \quad y \quad a_3 = -1$$

$$a^2 - 4a + 1 = 0; \quad a = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3} = \left\langle \begin{array}{l} a_4 = 2 + \sqrt{3} \\ a_5 = 2 - \sqrt{3} \end{array} \right.$$

No existe valor de a para el que se cumplan las tres ecuaciones simultáneamente. Luego ***no existe valor de a para el que los dos planos sean coincidentes.***

π_1 y π_2 paralelos no coincidentes.

Debe cumplirse que $\frac{2}{a-1} = \frac{-a^2}{-a} = \frac{-a}{-1} \neq \frac{a-1}{a}$; $\frac{2}{a-1} = \frac{a^2}{a} = \frac{a}{1} \neq \frac{a-1}{a}$ *esto da lugar a dos ecuaciones y una desigualdad:*

$$\begin{cases} \frac{2}{a-1} = \frac{a^2}{a} \\ \frac{2}{a-1} = \frac{a}{1} \\ \frac{2}{a-1} \neq \frac{a-1}{a} \end{cases}$$

Las dos ecuaciones las hemos resuelto antes.

1ª ecuación: a = 0, – 1 y 2. 2ª ecuación: a = – 1 y 2.

Las dos ecuaciones se cumplen para a = – 1 y 2. Veamos si para estos valores de a se cumple la desigualdad.

Para a = – 1, $\frac{2}{-1-1} \neq \frac{-1-1}{-1}$; $\frac{2}{-2} \neq \frac{-2}{-1}$; $-1 \neq 2$ *Sí*

Para a = 2, $\frac{2}{2-1} \neq \frac{2-1}{2}$; $\frac{2}{1} \neq \frac{1}{2}$; $1 \neq \frac{1}{2}$ *Sí*

Para a = – 1 y 2 π_1 y π_2 son planos paralelos no coincidentes.

π_1 y π_2 se cortan.

La posición relativa de dos planos puede ser coincidentes, paralelos no coincidentes o que se corten. Como π_1 y π_2 no son coincidentes y son paralelos no coincidentes para $a = -1$ y 2 entonces ***se cortan para $a \neq -1$ y 2.***

Solución: para $a = -1$ y 2 π_1 y π_2 son planos paralelos no coincidentes y para $a \neq -1$ y 2 se cortan.

3.1.2 Si $a = 0$, ¿ángulo entre π_1 y π_2?

Para $a = 0$, π_1: $2x = -1$ y π_2: $-x - z = 0$.

El ángulo entre los dos planos es igual al ángulo entre sus vectores normales.

$$\vec{n}_{\pi_1} = (2,0,0) \quad y \quad \vec{n}_{\pi_2} = (-1,-1,0)$$

$$\cos\left(\widehat{\vec{n}_{\pi_1}, \vec{n}_{\pi_2}}\right) = \frac{|(2,0,0)\,(-1,-1,0)|}{\sqrt{2^2+0^2+0^2}\,\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+0^2}} = \frac{|-2|}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \rightarrow \quad \left(\widehat{\vec{n}_{\pi_1}, \vec{n}_{\pi_2}}\right) = 45^{\circ}$$

Luego, ***el ángulo entre π_1 y π_2 es de 45°.***

3.1.3 Si $a = 0$ y $P=(1, 0, -1)$, ¿$d(P,\pi_1)$?

Para $a = 0$, π_1: $2x = -1$, π_1: $2x + 1 = 0$.

$$d(P,\pi_1) = \frac{|2 \cdot 1 + 1|}{\sqrt{2^2+0^2+0^2}} = \frac{3}{2}$$

Luego, ***la distancia del punto $P = (1, 0, -1)$ y el plano π_1 es $3/2$.***