

2.1 El estado tensional en un punto de un sólido elástico se define a partir de una matriz

cuadrada T de orden 3. El vector tensión en la dirección de $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ viene dado por

$U = T v$. Para

$$T = \begin{pmatrix} 2 & m & 0 \\ m & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad u = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

se pide:

2.1.1 **(1 punto)** Discutir el sistema de ecuaciones lineales $T v = u$ en función del parámetro real m .

2.1.2 **(0.75 puntos)** Resolver el sistema $T v = u$ para $m = -1$.

2.1.3 **(0.75 puntos)** Se llaman tensiones principales de T a los valores reales α tales que $\det(T - \alpha I) = 0$, siendo I la matriz identidad. Calcular las tensiones principales para $m = 2$.

Solución:

2.1.1)

$$\text{El sistema a discutir es: } \begin{pmatrix} 2 & m & 0 \\ m & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2x + my = 4 \\ mx + 2y = 4 \\ z = -2 \end{cases}$$

$$\text{La matriz ampliada de este sistema es: } T' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & m & 0 & 4 \\ m & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

T es una matriz 3×3 , por tanto el máximo rango de T es 3. T' es una matriz 3×4 , por tanto el máximo rango de T' es 3.

Empezamos estudiando el rango de T

$$\begin{vmatrix} 2 & m & 0 \\ m & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 - m^2; \quad 4 - m^2 = 0; \quad m^2 = 4; \quad m = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

Si $m \neq -2$ y 2

$|T| \neq 0 \rightarrow \text{ran}(T) = 3$, y como el máximo rango de T' es 3 $\rightarrow \text{ran}(T) = \text{ran}(T') = 3 = n^\circ$ incógnitas, por lo que el sistema es compatible y determinado.

Si $m = -2$

$$T' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

Sabemos que $|T| = 0$, estudiemos el rango de A ,

$$\left. \begin{array}{l} |I| = 1 \neq 0 \\ \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \end{array} \right\} \rightarrow \text{ran}(T) = 2$$

En T' , a partir del menor no nulo de orden 2 anterior formamos el menor de orden 3 añadiéndole la 1ª fila y 4ª columna:

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 8 + 8 = 16 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(T') = 3$$

Por lo tanto, $\text{ran}(T) = 2 \neq 3 = \text{ran}(T')$, luego el sistema es incompatible.

Si $m = 2$

$$T' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

Sabemos que $|T| = 0$, estudiemos el rango de A ,

$$\left. \begin{array}{l} |I| = 1 \neq 0 \\ \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \end{array} \right\} \rightarrow \text{ran}(T) = 2$$

En T' , como $F_1 = F_2$ el máximo rango de T' sería 2 y como $\text{ran}(T) = 2 \rightarrow \text{ran}(T') = 2$:

Por lo tanto, $\text{ran}(T) = \text{ran}(T') = 2 < 3 = n^\circ$ incógnitas, luego el sistema es compatible indeterminado.

Solución, si $m \neq -2$ y 2 , el sistema es compatible determinado;

si $m = -2$, el sistema es incompatible;

si $m = 2$, el sistema es compatible indeterminado.

2.1.2) Resolver el sistema $Tv = u$ para $m = -1$

$m = -1 \neq -2$ y 2 , el sistema es compatible determinado

El sistema a resolver es:
$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ -x + 2y = 4 \\ z = -2 \end{cases}$$
, tenemos el valor de z ; a partir de las 1ª y 2ª ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ -x + 2y = 4 \end{cases} \cdot \text{Calculemos } \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3$$

Resolviendo por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}}{3} = \frac{8 + 4}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}}{3} = \frac{8 + 4}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \\ z = -2 \end{cases}$$

Si $m = -1$ la solución es:
$$v = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

2.1.3) Se llaman tensiones principales de T a los valores reales α tales que $\det(T - \alpha I) = 0$, siendo I la matriz identidad. Calcular las tensiones principales para $m = 2$.

$$T - \alpha I = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\alpha & 2 & 0 \\ 2 & 2-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha \end{pmatrix} =$$

$$\det(T - \alpha I) = (2 - \alpha)^2 (1 - \alpha) - 4(1 - \alpha) = (1 - \alpha) [(2 - \alpha)^2 - 4] = (1 - \alpha) (4 - 4\alpha + \alpha^2 - 4) = (1 - \alpha) (-4\alpha + \alpha^2)$$

$$\det(T - \alpha I) = 0; \quad (1 - \alpha) (-4\alpha + \alpha^2) = 0; \quad \begin{cases} 1 - \alpha = 0 \rightarrow \alpha = 1 \\ -4\alpha + \alpha^2 = 0 \rightarrow \alpha(-4 + \alpha) = 0 \begin{cases} \alpha = 0 \\ -4 + \alpha = 0 \rightarrow \alpha = 4 \end{cases} \end{cases}$$

Solución: las tensiones principales para $m = 2$ son $\alpha = 0$, $\alpha = 1$ y $\alpha = 4$.