

2.2 Decimos que una matriz cuadrada es ortogonal cuando su matriz inversa coincide con su matriz transpuesta. Se pide:

2.2.1 (0.75 puntos) Comprobar que para todo valor real α la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \text{ es ortogonal.}$$

2.2.2 (0.75 puntos) Determinar los valores de a y b para que la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sea ortogonal. ¿Cuántas matrices ortogonales de esta forma existen?

2.2.3 (1 punto) Resuelve la ecuación matricial con incógnita X

$$BX + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

donde B es una matriz ortogonal como la del apartado anterior.

Solución:

2.2.1 Cálculo de A^{-1} .

A es invertible si $|A| \neq 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{vmatrix} = \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1 \neq 0 \rightarrow \exists A^{-1}$$

Cálculo:

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{menores}} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{adjuntos}} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{traspuesta}} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$Y \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$\text{Por otro lado, } A^t = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Finalmente, como $A^t = A^{-1}$, A es ortogonal.

Otra forma de resolver este apartado es comprobar que $A A^t = A^t A = I$

$$A A^t = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) & -\cos(\alpha)\sin(\alpha) + \sin(\alpha)\cos(\alpha) \\ -\sin(\alpha)\cos(\alpha) + \cos(\alpha)\sin(\alpha) & \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$A^t A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) & \cos(\alpha)\sin(\alpha) - \sin(\alpha)\cos(\alpha) \\ \sin(\alpha)\cos(\alpha) - \cos(\alpha)\sin(\alpha) & \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Luego, A es ortogonal.

2.2.2 Determinar los valores de a y b para que la matriz B sea ortogonal.

Comprobemos que $B^{-1} = B^t$.

Cálculemos B^{-1}

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad |B| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{vmatrix} = -ab. \quad -ab = 0 \begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases} \rightarrow \exists B^{-1} \text{ cuando } a \neq 0 \text{ y } b \neq 0.$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{menores}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & & b & 0 & \\ 0 & a & & 0 & a & \\ \hline 0 & 0 & & b & 0 & \\ 0 & a & & 0 & a & \\ 1 & 0 & & 0 & 0 & \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -b \\ 0 & -ab & 0 \\ -a & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{adjuntos}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -b \\ 0 & -ab & 0 \\ -a & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{traspuesta}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a \\ 0 & -ab & 0 \\ -b & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad \text{Finalmente } B^{-1} = \frac{1}{|B|} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a \\ 0 & -ab & 0 \\ -b & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{-ab} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a \\ 0 & -ab & 0 \\ -b & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/b \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/a & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow B^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^t = B^{-1}; \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/b \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/a & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{b} \\ a = \frac{1}{a} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b^2 = 1 \\ a^2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = \pm 1 \\ a = \pm 1 \end{cases} \quad (a \neq 0 \text{ y } b \neq 0)$$

La matriz B es ortogonal cuando $a = \pm 1$ y $b = \pm 1$.

¿Cuántas matrices ortogonales de esta forma existen?

Existen cuatro matrices:

$$a = b = 1, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad a = 1 \text{ y } b = -1, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad a = -1 \text{ y } b = 1, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{y } a = b = -1, \quad B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.2.3 Resolver la ecuación matricial con incógnita X :

$$BX + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{donde } B \text{ es una matriz ortogonal como la del apartado anterior.}$$

$$\text{Despejemos } X: \quad BX + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad BX = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Multiplicando por } B^{-1} \text{ por la izquierda: } B^{-1}BX = B^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad X = B^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Como B es una matriz ortogonal como la del apartado anterior $\rightarrow B^{-1} = B^t$

$$X = B^t \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ 0 & 1 \\ a & a \end{pmatrix}$$

$$\text{Solución: } X = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ 0 & 1 \\ a & a \end{pmatrix}.$$