EJERCICIO A

PROBLEMA 1. Dado el sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} x+y+z=\lambda \\ 2x+3y+5z=2 \\ 3x+5y+\lambda^2 z=1 \end{cases}$, dependiente del parámetro λ, se pide:

i) Determinar para qué valores de λ el sistema es compatible determinado, compatible indeterminado e incompatible. *(1,3 puntos)*

ii) Obtener el conjunto S de las soluciones del sistema para el caso compatible indeterminado. *(1 punto)*

iii) Obtener el vector de S ortogonal (perpendicular) al vector (1,1,2). *(1 punto)*

Solución:

i) La matriz ampliada del sistema es

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \lambda \\ 2 & 3 & 5 & 2 \\ 3 & 5 & \lambda^2 & 1 \end{array}\right)$$

El máximo rango posible de A y A' es 3, estudiamos el rango de A

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & \lambda^2 \end{vmatrix} = 3\lambda^2 + 15 + 10 - 9 - 25 - 2\lambda^2 = \lambda^2 - 9$$

$$\lambda^2 - 9 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda^2 = 9 \quad \rightarrow \quad \lambda = \pm\sqrt{9} \quad \rightarrow \quad \lambda = \pm 3$$

Para $\lambda \neq -3$ *y* $\lambda \neq 3$*, ran(A) = 3 = ran(A') = nº de incógnitas, Sistema Compatible Determinado.*

Para $\lambda = -3$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & 5 & 2 \\ 3 & 5 & 9 & 1 \end{array}\right)$$

Sabemos que det(A) = 0, calculemos el rango de A,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(A) = 2$$

Veamos el rango de A', al menor anterior le orlamos la 4ª columna y la 3ª fila,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 30 + 6 + 27 - 10 - 2 = -6 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(A') = 3$$

Como ran(A)=2≠ 3=ran(A'), Sistema Incompatible

Para $\lambda = 3$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 2 \\ 3 & 5 & 9 & 1 \end{array}\right)$$

Al igual que calculamos en el caso anterior ran(A) = 2
Veamos el de A'

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 30 + 6 - 27 - 10 - 2 = 39 - 39 = 0$$

como no hay más menores de orden 3 de A', ran(A') = 2
Como ran(A) = 2 = ran(A') < nº incógnitas, Sistema Compatible Indeterminado

En resumen,

Para $\lambda \neq -3$ *y* $\lambda \neq 3$*, Sistema Compatible Determinado.*

Para $\lambda = -3$*, Sistema Incompatible*

Para $\lambda = 3$*, Sistema Compatible Indeterminado*

ii) *El sistema es compatible indeterminado para* $\lambda = 3$*, el menor que da el rango 2 es el formado por 1ª y 2ª fila y 1ª y 2ª columna, luego las incógnitas principales serán x e y; para resolver el sistema usaremos la 1ª y 2ª ecuación. Es decir:*

$$\begin{cases} x + y = 3 - z \\ 2x + 3y = 2 - 5z \end{cases}$$

En el apartado anterior ya calculamos el determinante del sistema,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1$$

Resolviendo el sistema por la regla de Cramer,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3-z & 1 \\ 2-5z & 3 \end{vmatrix}}{1} = 9 - 3z - 2 + 5z = 7 + 2z$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3-z \\ 2 & 2-5z \end{vmatrix}}{1} = 2 - 5z - 6 + 2z = -4 - 3z$$

$$\text{Para } \lambda = 3 \text{ el conjunto, } S\text{, de soluciones del sistema es: } \begin{cases} x = 7 + 2\mu \\ y = -4 - 3\mu \quad \mu \in \Re \\ z = \mu \end{cases}$$

iii) *Los vectores de S son de la forma* $(7 + 2\mu, -4 - 3\mu, \mu)$.

El que sea ortogonal al vector (1 , 1 , 2) debe cumplir:

$$(7 + 2\mu, -4 - 3\mu, \mu) \cdot (1,1,2) = 0$$

$$7 + 2\mu - 4 - 3\mu + 2\mu = 0$$

$$\mu + 3 = 0 \quad \rightarrow \quad \mu = -3$$

El vector buscado es (1 , 5 , – 3)