

EJERCICIO A

PROBLEMA 2. Dado el plano definido por la ecuación $\pi: 8x - 4y + z = 3$, hallar

- a) La ecuación de la recta perpendicular al plano π que pasa por el punto $P(1, -3, 7)$, expresada como la intersección de dos planos. (1 punto)
 b) La distancia del punto P al plano π . (0,8 puntos)
 c) Las ecuaciones de los planos que distan 3 unidades del plano π . (1,5 puntos)

Solución:

- a) Como la recta debe ser perpendicular al plano, el vector ortogonal del plano será director de la recta,

$$\vec{n}_\pi (8, -4, 1)$$

Las ecuaciones paramétricas de la recta r serán,

$$r: \begin{cases} x = 1 + 8\lambda \\ y = -3 - 4\lambda \\ z = 7 + \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathfrak{R}$$

La ecuación continua,

$$\frac{x-1}{8} = \frac{y+3}{-4} = \frac{z-7}{1}$$

A partir de esta ecuación obtenemos la de dos planos cuya intersección será la recta r ,

$$\begin{cases} \frac{x-1}{8} = \frac{y+3}{-4} \\ \frac{x-1}{8} = \frac{z-7}{-1} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -4x + 4 = 8y + 24 \\ x - 1 = 8z - 56 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -4x - 8y = 20 \\ x - 8z = -55 \end{cases}$$

La ecuación de la recta expresada como la intersección de dos planos es: (simplificamos la 1ª ecuación)

$$r: \begin{cases} x + 2y = -5 \\ x - 8z = -55 \end{cases}$$

b)

$$d(P, \pi) = \frac{|8 \cdot 1 - 4(-3) + 7 - 3|}{\sqrt{8^2 + (-4)^2 + 1^2}} = \frac{|8 + 12 + 7 - 3|}{\sqrt{64 + 16 + 1}} = \frac{24}{\sqrt{81}} = \frac{24}{9} = \frac{8}{3} \text{ u.l.}$$

- c) Los planos que distan 3 unidades del plano π son paralelos a él, su ecuación general será de la forma:

$$8x - 4y + z = D$$

Como los dos planos son paralelos $d(\pi, \pi_1) = d(P_\pi, \pi_1)$

Busquemos un punto del plano π , $x = 0$, $y = 0$ luego $z = 3$

$$d(\pi, \pi_1) = d(P_\pi, \pi_1) = d((0, 0, 3), \pi_1) = \frac{|3 - D|}{\sqrt{64 + 16 + 1}} = \frac{|3 - D|}{\sqrt{81}} = \frac{|3 - D|}{9}$$

$$\text{Luego } 3 = \frac{|3 - D|}{9}$$

$$27 = |3 - D| \rightarrow \begin{cases} 3 - D = 27 \rightarrow D = -24 \\ 3 - D = -27 \rightarrow D = 30 \end{cases}$$

Por lo que hay dos planos que distan 3 unidades del plano π , son los planos $8x - 4y + z = -24$ y $8x - 4y + z = 30$