EJERCICIO A

PROBLEMA 4. Calcular, razonadamente, el área de la región limitada por las curvas $y = x^2$ e $y = \dfrac{2}{1+x^2}$

Solución:

Puntos de corte entre las dos curvas,

$$x^2 = \frac{2}{1+x^2}$$

$$x^2 + x^4 = 2$$

$$x^4 + x^2 - 2 = 0$$

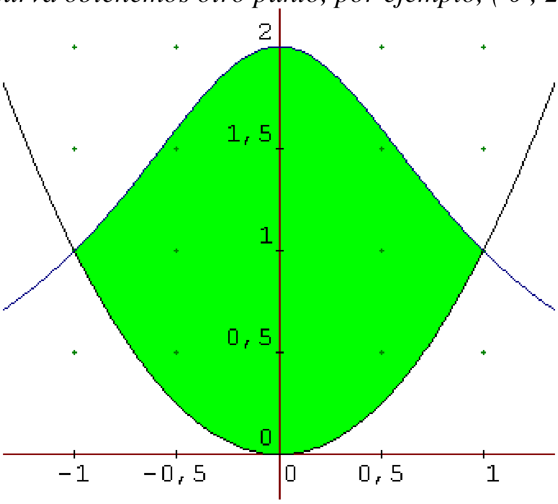
Resolvamos esta ecuación por Ruffini,

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\
1 & & 1 & 1 & 2 & 2 \\
\hline
 & 1 & 1 & 2 & 2 & \underline{|0} \\
-1 & & -1 & 0 & -2 & \\
\hline
 & 1 & 0 & 2 & \underline{|0} &
\end{array}$$

$x^2 + 2 = 0$ *no tiene raíces reales*

Ambas curvas se cortan en los puntos (1 , 1) y (-1 , 1)

$y = x^2$ es una parábola; de la otra curva obtenemos otro punto, por ejemplo, (0 , 2). La representación gráfica será:



El área de la región limitada por las dos curvas el la zona verde, la obtendremos a partir de la siguiente integral definida,

$$A = \int_{-1}^{1} \left(\frac{2}{1+x^2} - x^2 \right) dx = \left[2\,arc\,tg\,x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{1} = \left[2\,arc\,tg\,1 - \frac{1^3}{3} \right] - \left[2\,arc\,tg\,(-1) - \frac{(-1)^3}{3} \right] =$$

$$= 2\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} - 2\left(\frac{-\pi}{4} \right) + \frac{-1}{3} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3} + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3} = \pi - \frac{2}{3} = 2'474926$$

$$El\ área\ pedida\ es\ \left(\pi - \frac{2}{3} \right) u.a.$$