

EJERCICIO A

PROBLEMA 1. Considerar las matrices: $A = \begin{pmatrix} 0 & m & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -(m+1) \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- a) ¿Para qué valores reales de m es A inversible? Calcular la matriz A^{-1} (2 puntos).
 b) En la anterior matriz A con $m = 0$, obtener la matriz real cuadrada X de orden 3 que satisface la igualdad $B - AX = AB$ (1,3 puntos).

Solución:

a) A será inversible si y sólo si $|A| \neq 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & m & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -(m+1) \end{vmatrix} = 3 - 5m + m(m+1) = 3 - 5m + m^2 + m = m^2 - 4m + 3$$

$$m^2 - 4m + 3 = 0 \rightarrow m = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} m_1 = 3 \\ m_2 = 1 \end{cases}$$

A es inversible para $m \neq 1$ y $m \neq 3$

Calculemos A^{-1}

$$(\alpha_{ij}) = \left(\begin{array}{c|c|c} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -(m+1) \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -(m+1) \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \\ \hline \begin{vmatrix} m & 3 \\ 1 & -(m+1) \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 5 & -(m+1) \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & m \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \\ \hline \begin{vmatrix} m & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & m \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 1 & -m+4 & 1 \\ -m^2-m-3 & -15 & -5m \\ -m & -3 & -m \end{pmatrix} \rightarrow (A_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & m-4 & 1 \\ m^2+m+3 & -15 & 5m \\ -m & 3 & -m \end{pmatrix}$$

$$(A_{ji}) = \begin{pmatrix} 1 & m^2+m+3 & -m \\ m-4 & -15 & 3 \\ 1 & 5m & -m \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{m^2-4m+3} \begin{pmatrix} 1 & m^2+m+3 & -m \\ m-4 & -15 & 3 \\ 1 & 5m & -m \end{pmatrix} \text{ para } m \neq 1 \text{ y } m \neq 3$$

b) La matriz A para $m = 0$ es $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Buscamos una matriz X / $B - AX = AB$, despejemos X

$$-AX = -B + AB$$

$$AX = B - AB$$

$$X = A^{-1}(B - AB) = A^{-1}B - A^{-1}AB = A^{-1}B - B = (A^{-1} - I)B$$

calculemos la expresión obtenida finalmente,

$$\text{Para } m = 0 \quad A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -4 & -15 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1 & 0 \\ -4/3 & -5 & 1 \\ 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} - I = \begin{pmatrix} 1/3 & 1 & 0 \\ -4/3 & -5 & 1 \\ 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 & 1 & 0 \\ -4/3 & -6 & 1 \\ 1/3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(A^{-1} - I)B = \begin{pmatrix} -2/3 & 1 & 0 \\ -4/3 & -6 & 1 \\ 1/3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2/3 & 0 \\ -6 & -4/3 & 1 \\ 0 & 1/3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Luego } X = \begin{pmatrix} 1 & -2/3 & 0 \\ -6 & -4/3 & 1 \\ 0 & 1/3 & -1 \end{pmatrix}$$