

## EJERCICIO B

**PROBLEMA 1.** Se consideran las matrices cuadradas reales de orden 2,  $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$  y  $Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ .

Calcular: a) La matriz  $P^{-1}$  (1,1 puntos). b) La matriz real cuadrada  $X$  de orden 2, tal que  $P^{-1}XP = Q$  (1,1 puntos). c) La matriz  $(PQP^{-1})^2$  (1,1 puntos).

*Solución:*

a) Como  $|P| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1 \neq 0 \Rightarrow \exists P^{-1}$

Calculemos  $P^{-1}$

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow (\alpha_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow (A_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow (A_{ji}) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Buscamos la matriz  $X / P^{-1}XP = Q$ , efectuemos las operaciones necesarias para despejar  $X$

$$P P^{-1} X P P^{-1} = P Q P^{-1} ; I X I = P Q P^{-1} ; \text{luego } X = P Q P^{-1}$$

Calculemos la matriz  $X$

$$X = P Q P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6+12 & 4-6 \\ -12+18 & 8-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$$

c)  $(P Q P^{-1})^2 = X^2 = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36-12 & -12+2 \\ 36-6 & -12+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & -10 \\ 30 & -11 \end{pmatrix}$