Matemáticas II Septiembre 2004

EJERCICIO B

PROBLEMA 1. Para las matrices reales: $A=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\ 3 & -5 & 6\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$ $I=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, se pide:

a) Justificar que existe la matriz A^{-1}, inversa de A, y calcular el determinante de A^{-1} (1,2 puntos).
b) Calcula la matriz B = A (A + 4 I) (0,7 puntos).
c) Determinar los números reales x, y, z, t que cumplen $A^{-1} = x A + y I$, $A^2 = z A + t I$ (1,4 puntos)

Solución:

a) *Como A es una matriz cuadrada de orden 3 tendrá inversa si su determinante es no nulo, calculémoslo:*

$$|A|=\begin{vmatrix}-1 & -1 & 2\\ 3 & -5 & 6\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}=0-6-6-(-10+6)=-12-(-4)=-12+4=-8\neq 0$$

Como el determinante de A es no nulo existe A^{-1}.

Calculemos $|A^{-1}|$
Sabemos, por definición, que $A \,.\, A^{-1} = I$
También sabemos que $|A\,.\,B| = |A|\,|B|$ siendo A y B matrices cuadradas de orden n.
Como A y A^{-1} son matrices cuadradas de orden 3,
$|I| = |A\,.\,A^{-1}| = |A|\,|A^{-1}|$, *como* $|I| = 1$
$|A|\,|A^{-1}| = 1$, *por lo tanto* $|A^{-1}| = 1 / |A|$
En nuestro caso $|A^{-1}|=\dfrac{1}{-8}=\dfrac{-1}{8}$

b) *Calculamos A + 4 I*

$$A+4I=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\ 3 & -5 & 6\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\ 3 & -5 & 6\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 3 & -1 & 6\\ 1 & -1 & 4\end{pmatrix}$$

$$B=A(A+4I)=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\ 3 & -5 & 6\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 3 & -1 & 6\\ 1 & -1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3-3+2 & 1+1-2 & -2-6+8\\ 9-15+6 & -3+5-6 & 6-30+24\\ 3-3+0 & -1+1+0 & 2-6+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 0\\ 0 & 0 & -4\end{pmatrix}$$

A partir del resultado anterior podemos decir que $B = -4\,I$

c) *Para no tener que calcular A^{-1} transformamos la primera condición multiplicándola por la derecha por A,*
$A^{-1} A = x\,A\,A + y\,I\,A$
$I = x\,A^2 + y\,A$
Calculemos la matriz A^2

$$B^2=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\ 3 & -5 & 6\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\ 3 & -5 & 6\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-3+2 & 1+5-2 & -2-6+0\\ -3-15+6 & -3+25-6 & 6-30+0\\ -1-3+0 & -1+5+0 & 2-6+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 4 & -8\\ -12 & 16 & -24\\ -4 & 4 & -4\end{pmatrix}$$

La primera condición expresada matricialmente sería:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}0 & 4 & -8\\ -12 & 16 & -24\\ -4 & 4 & -4\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\ 3 & -5 & 6\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

que da lugar al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 1=-y \\ 0=4x-y \\ 0=-8x+2y \\ 0=-12x+3y \\ 1=16x-5y \\ 0=-24x+6y \\ 0=-4x+y \\ 0=4x-y \\ 1=-4x \end{cases}$$

En este sistema se verifica que:
3ª ecuación = -2 . 2ª ecuación,
4ª = -3 . 2ª,
6ª = -6 . 2ª,
7ª = -1 . 2ª,
8ª = 2ª,
luego las ecuaciones 3ª, 4ª, 6ª, 7ª y 8ª son proporcionales a la 2ª ecuación; podemos eliminarlas y el sistema queda reducido a

$$\begin{cases} 1=-y \\ 0=4x-y \\ 1=16x-5y \\ 1=-4x \end{cases}$$

De la primera ecuación obtenemos y = - 1
de la última ecuación x = -1/4. Veamos si estos valores de x e y cumplen las otras dos ecuaciones:

$0=4\frac{-1}{4}-(-1)$	$1=16\frac{-1}{4}-5(-1)$
$0=-1+1$	$1=-4+5$
$0=0$	$1=1$
Cumplen 2ª ecuación	*Cumplen 3ª ecuación*

Luego x = -1/4 e y = -1 son solución del sistema.

Estudiemos ahora la 2ª condición $A^2 = zA + tI$
La expresión matricialmente sería:

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & -8 \\ -12 & 16 & -24 \\ -4 & 4 & -4 \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que da lugar al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 0=-z+t \\ 4=-z \\ -8=2z \\ -12=3z \\ 16=-5z+t \\ -24=6z \\ -4=z \\ 4=-z \\ -4=t \end{cases}$$

En este sistema se verifica que las ecuaciones 2ª, 3ª, 4ª, 6ª, 7ª y 8ª son la misma – 4 = z.
El sistema queda reducido a

$$\begin{cases} 0=-z+t \\ 16=-5z+t \\ -4=z \\ -4=t \end{cases}$$

La tercera y cuarta ecuación indican z = - 4 y t = - 4. Veamos si estos valores de z y t cumplen las otras dos ecuaciones:

0 = -(-4) + (-4)	*16 = -5 (-4) + (-4)*
0 = 4 – 4	*16 = 20 – 4*
0 = 0	*16 = 16*
Cumplen 1ª ecuación	*Cumplen 3ª ecuación*

Luego z = - 4 y t = - 4 son solución del sistema.

Por tanto los valores de x, y, z, t buscados son $x=\frac{-1}{4}$, $y=-1$, $z=-4$, $t=-4$