

## EJERCICIO B

**PROBLEMA 2.** En el espacio se consideran:

- El plano  $\pi$  que pasa por los puntos  $(11, 1, 2)$ ,  $(5, 7, 5)$  y  $(7, -1, -2)$ .
  - Y la recta  $r$  intersección de los planos de ecuaciones implícitas  $x + y + z = 15$  y  $2x - 7y + 2z = 3$ .
- a) **Calcular** la ecuación paramétrica de  $r$  (**0,6 puntos**) y la ecuación implícita del plano  $\pi$  (**0,4 puntos**).
- b) **Calcular** el punto  $P$  intersección de  $r$  y  $\pi$  (**0,8 puntos**) y el ángulo  $\alpha$  que determinan  $r$  y  $\pi$  (**0,5 puntos**).
- c) **Calcular** los puntos  $M$  y  $N$  de la recta  $r$  cuya distancia al plano  $\pi$  es igual a 3 u.l. (**1 punto**).

*Solución:*

a) *Ecuación paramétrica de  $r$*

$$r: \begin{cases} x + y + z = 15 \\ 2x - 7y + 2z = 3 \end{cases} \quad \text{como} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} = -7 - 2 = -9 \neq 0$$

*resolvemos el sistema de la recta  $r$  usando  $x$  e  $y$  como incógnitas principales.*

$$\begin{cases} x + y = 15 - z \\ 2x - 7y = 3 - 2z \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 15 - z & 1 \\ 3 - 2z & -7 \end{vmatrix}}{-9} = \frac{-105 + 7z - 3 + 2z}{-9} = \frac{-108 + 9z}{-9} = 12 - z$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 15 - z \\ 2 & 3 - 2z \end{vmatrix}}{-9} = \frac{3 - 2z - 30 + 2z}{-9} = \frac{-27}{-9} = 3$$

La ecuación paramétrica de la recta  $r$  será:  $r: \begin{cases} x = 12 - \lambda \\ y = 3 \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathfrak{R}$

*Ecuación implícita del plano  $\pi$*

*Punto  $(11, 1, 2)$*

Vectores directores:  $\vec{v} = (11, 1, 2) - (5, 7, 5) = (6, -6, -3) \approx (2, -2, -1)$

$\vec{w} = (11, 1, 2) - (7, -1, -2) = (4, 2, 4) \approx (2, 1, 2)$

*La ecuación implícita del plano  $\pi$  será,*

$$\begin{vmatrix} x-11 & y-1 & z-2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-11) \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - (y-1) \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + (z-2) \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-11)(-4+1) - (y-1)(4+2) + (z-2)(2+4) = 0$$

$$(x-11)(-3) - (y-1)6 + (z-2)6 = 0$$

$$-3x + 33 - 6y + 6 + 6z - 12 = 0$$

$$-3x - 6y + 6z + 27 = 0$$

*simplificando por  $-3$*

$x + 2y - 2z - 9 = 0$  es la ecuación del plano  $\pi$ .

b)  $P$ , punto de intersección de  $r$  y  $\pi$

Sustituimos las coordenadas de un punto cualquiera de la recta  $r$  en la ecuación del plano  $\pi$

$$(12 - \lambda, 3, \lambda) \in r$$

$$12 - \lambda + 2 \cdot 3 - 2\lambda - 9 = 0$$

$$12 - \lambda + 6 - 2\lambda - 9 = 0$$

$$9 - 3\lambda = 0$$

$$-3\lambda = -9 \rightarrow \lambda = \frac{-9}{-3} = 3$$

Por lo que el punto  $P$  será:  $(12 - 3, 3, 3) = (9, 3, 3)$

Ángulo  $\alpha$  que determinan  $r$  y  $\pi$ .

de  $r$   $\vec{v}_r = (-1, 0, 1)$

de  $\pi$  el vector ortogonal  $\vec{u} = (1, 2, -2)$

Sea  $\alpha = \widehat{(r, \pi)}$

$$\text{sen } \alpha = \frac{|(-1, 0, 1) \cdot (1, 2, -2)|}{\sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2} \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{|-1 - 2|}{\sqrt{2} \sqrt{9}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Luego  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  rds

c)

¿ $M, N \in r$ ? /  $d(M, \pi) = d(N, \pi) = 3$

$\pi: x + 2y - 2z - 9 =$

Sea  $P \in r \rightarrow P = (12 - \lambda, 3, \lambda)$

$$d(P, \pi) = \frac{|12 - \lambda + 2 \cdot 3 - 2\lambda - 9|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{|9 - 3\lambda|}{3}$$

$$\frac{|9 - 3\lambda|}{3} = 3 \rightarrow |9 - 3\lambda| = 9 \rightarrow \begin{cases} 9 - 3\lambda = 9 \rightarrow -3\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 0 \\ 9 - 3\lambda = -9 \rightarrow -3\lambda = -18 \rightarrow \lambda = 6 \end{cases}$$

Para  $\lambda = 0 \rightarrow M(12, 3, 0)$

$\lambda = 6 \rightarrow N(6, 3, 6)$