

Problema 1.1. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ y el vector $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, se pide obtener razonadamente

- El vector X tal que $A X = 0X$. (1,1 puntos).
- Todos los vectores X tales que $A X = 3X$. (1,1 puntos).
- Todos los vectores X tales que $A X = 2X$. (1,1 puntos).

Solución:

a) Buscamos el vector $X / A X = 0 X$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x - y \\ 2x + 4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases}$$

Es un sistema homogéneo en el que $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 + 2 = 6 \neq 0$ luego es un sistema compatible determinado,

su solución es la trivial $x = y = 0$

El vector X buscado será: $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) Buscamos el vector $X / A X = 3 X$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x - y \\ 2x + 4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x - y = 3x \\ 2x + 4y = 3y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2x - y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

Es un sistema homogéneo en el que $\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 2 = 0$. Como $|1| = 1 \neq 0$ es un sistema compatible indeterminado.

$2x + y = 0$; $y = -2x$, por lo tanto la solución del sistema es: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = -2\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathfrak{R}$

Y el vector X será: $X = \begin{pmatrix} \lambda \\ -2\lambda \end{pmatrix} \quad \lambda \in \mathfrak{R}$

c) Buscamos el vector $X / A X = 2 X$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x - y \\ 2x + 4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x - y = 2x \\ 2x + 4y = 2y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x - y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases}$$

Es un sistema homogéneo en el que $\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 2 = 0$. Como $|-1| = -1 \neq 0$ es un sistema compatible indeterminado.

$-x - y = 0$; $y = -x$, por lo tanto la solución del sistema es: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathfrak{R}$

Y el vector X será: $X = \begin{pmatrix} \lambda \\ -\lambda \end{pmatrix} \quad \lambda \in \mathfrak{R}$