Problema 2.1. Dados los puntos P = (3, – 1, 4) y Q = (1, 0, – 1) , y el plano π de ecuación π: x – 2 y + 2 z + 5 = 0, se pide calcular razonadamente:

a) La ecuación de la recta **r** que pasa por el punto P y es perpendicular al plano π. (*1,4 puntos*).

b) La ecuación de los planos que pasan por el punto P y son perpendiculares al plano π. (*1 punto*).

c) La ecuación del plano π' que pasa por los puntos P y Q y es perpendicular al plano π. (*0,9 puntos*).

Solución:

a) Recta r: pasa por P y es $\perp$ *a π.*

El vector director de la recta, $\vec{v}_r$*, será el vector ortogonal al plano π,* $\vec{n}_\pi$*, y* $\vec{n}_\pi = (1,-2,2)$.

Por lo tanto, de la recta r conocemos,

$$\begin{cases} Punto \quad P(3,-1,4) \\ vector\ director \quad \vec{v}_r = (1,-2,2) \end{cases}$$

Las ecuaciones de la recta r serán:

Ecuación vectorial $\quad (x,y,z) = (3,-1,4) + \lambda(1,-2,2) \qquad \lambda \in \Re$

Ecuación paramétrica $\quad \begin{cases} x = 3+\lambda \\ y = -1-2\lambda \quad \lambda \in \Re \\ z = 4+2\lambda \end{cases}$

Ecuación continua $\quad \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z-4}{2}$

b) Los planos que pasan por P y son perpendiculares al plano π contienen la recta r del apartado anterior. Por lo tanto las ecuaciones pedidas podemos obtenerlas a partir de la ecuación de la recta r dada como intersección de dos planos.

De la ecuación continua de r :

$$\begin{cases} \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y+1}{-2} \\ \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{z-4}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2x+6 = y+1 \\ 2x-6 = z-4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2x-y+6-1 = 0 \\ 2x-z-6+4 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2x-y+5 = 0 \\ 2x-z-2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x+y+5 = 0 \\ 2x-z-2 = 0 \end{cases}$$

El haz de planos que contienen a la recta r será: $\lambda (2x + y - 5) + \mu (2x - z - 2) = 0$ *y esta es la ecuación de los planos pedidos.*

c) Ecuación del plano π' que pasa por los puntos P y Q y es perpendicular al plano π.

Como $\pi' \perp \pi \rightarrow \vec{n}_\pi$ *es un vector director de* π'

Como $P\ y\ Q \in \pi' \rightarrow \vec{PQ}$ *es otro vector director de* π'

$\vec{n}_\pi = (1,-2,2) \quad y \quad \vec{PQ} = (1,0,-1) - (3,-1,4) = (-2,1,-5)$

Elegimos como punto del plano π', por ejemplo, P(3, – 1, 4). La ecuación del plano π' será:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-4 \\ 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando por la primera fila,

$$(x-3)\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} - (y+1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} + (z-4)\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-3)(10-2)-(y+1)(-5+4)+(z-4)(1-4)=0$$

$$(x-3)8-(y+1)(-1)+(z-4)(-3)=0$$

$$8x-24+y+1-3z+12=0$$

$$8x+y-3z-11=0$$

Luego, la ecuación del plano π': $8x + y - 3z - 11 = 0$