

**PROBLEMA A.3.** Dadas las funciones  $f(x) = x^3$  y  $g(x) = 2x^2 - x$ , se pide:

- Obtener razonadamente los puntos de intersección A y B de las curvas  $y = f(x)$  e  $y = g(x)$ . (3 puntos)
- Demostrar que  $f(x) \geq g(x)$  cuando  $x \geq 0$ . (3 puntos)
- Calcular razonadamente el área de la superficie limitada por las dos curvas entre los puntos A y B. (4 puntos)

*Solución:*

a) Puntos de intersección entre  $y = f(x)$  e  $y = g(x)$

Debemos resolver la siguiente ecuación:

$$x^3 = 2x^2 - x$$

$$x^3 - 2x^2 + x = 0$$

$$x(x^2 - 2x + 1) = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow (x-1)^2 = 0 \rightarrow x-1 = 0 \rightarrow x = 1 \end{array} \right.$$

$$\text{Para } x = 0, f(0) = 0^3 = 0 \rightarrow (0, 0)$$

$$\text{Para } x = 1, f(1) = 1^3 = 1 \rightarrow (1, 1)$$

Los puntos de intersección buscados son:  $A = (0, 0)$  y  $B = (1, 1)$

b)  $f(x) \geq g(x)$

Veamos cuando se cumple esta desigualdad.

$$x^3 \geq 2x^2 - x$$

$$x^3 - 2x^2 + x \geq 0$$

Según hemos obtenido en el apartado anterior:  $x^3 - 2x^2 + x = x(x-1)^2$

Como  $(x-1)^2$  es siempre positivo, por estar elevado al cuadrado, el signo del primer miembro de la desigualdad depende del de  $x$ .

Luego para  $x \geq 0$  se cumple que  $x^3 - 2x^2 + x \geq 0$  y por lo tanto  $f(x) \geq g(x)$ . c.q.d.

c) Representemos gráficamente las dos curvas.

Por lo resuelto en el apartado a) conocemos los puntos de corte entre ambas,  $A = (0, 0)$  y  $B = (1, 1)$ .

$$y = 2x^2 - x$$

Es una parábola. Buscamos sus puntos de corte con los ejes coordenados y su vértice.

$$x = 0 \rightarrow y = 2 \cdot 0^2 - 0 = 0 \rightarrow (0, 0)$$

$$y = 0 \rightarrow 2x^2 - x = 0 \rightarrow x(2x - 1) = 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ 2x - 1 = 0 \rightarrow 2x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{2} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (0, 0) \\ \left(\frac{1}{2}, 0\right) \end{array}$$

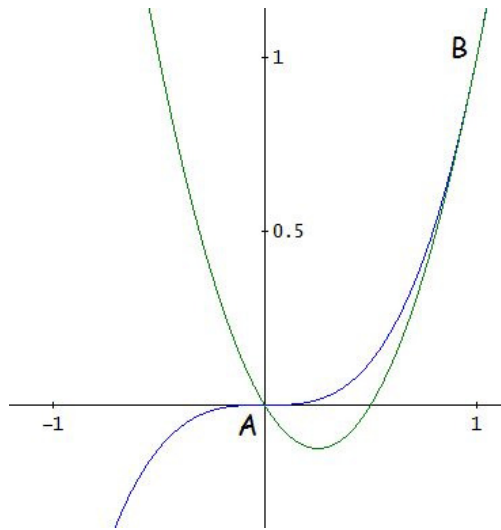
$$\text{Vértice } x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-1)}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4} \rightarrow y = 2\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{4} = 2 \cdot \frac{1}{16} - \frac{1}{4} = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} = \frac{1}{8} - \frac{2}{8} = \frac{-1}{8} \quad \left(\frac{1}{4}, \frac{-1}{8}\right)$$

$$y = x^3$$

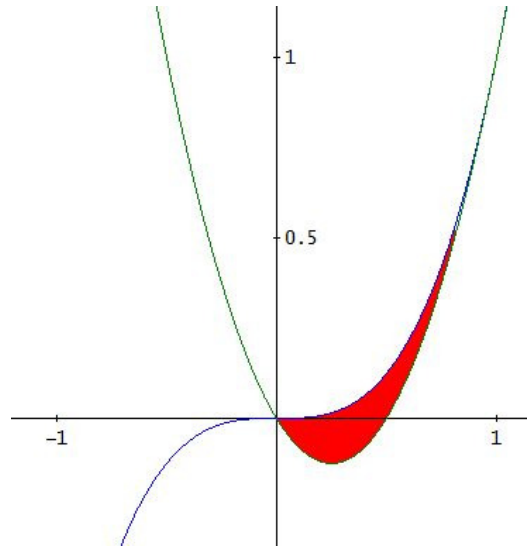
La representamos a partir de una tabla de valores,

| x  | y = x <sup>3</sup> |
|----|--------------------|
| -1 | -1                 |
| 0  | 0                  |
| 1  | 1                  |

La representación gráfica será:



El área a calcular es:



El cálculo del área pedida será mediante la siguiente integral definida:

$$\int_0^1 (x^3 - (2x^2 - x)) dx = \int_0^1 (x^3 - 2x^2 + x) dx = \left[ \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - 0 = \frac{3-8+6}{12} = \frac{1}{12}$$

El área de la superficie limitada por las dos curvas mide  $\frac{1}{12}$  u.a.