

PROBLEMA A.3. Se definen las funciones f y g por $f(x) = -x^2 + 2x$ y $g(x) = x^2$.

Obtener **razonadamente**:

- Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de cada una de esas dos funciones. (2 puntos).
- El máximo relativo de la función $f(x) = -x^2 + 2x$ y el mínimo relativo de $g(x) = x^2$. (2 puntos).
- Los puntos de intersección de las curvas $y = -x^2 + 2x$ e $y = x^2$. (2 puntos).
- El área encerrada entre las curvas $y = -x^2 + 2x$ e $y = x^2$, donde en ambas curvas la x varía entre 0 y 1. (4 puntos).

Solución:

$f(x)$ y $g(x)$ son funciones polinómicas, por lo que su dominio es \mathbb{R} .

a) $f(x) = -x^2 + 2x$

$$f'(x) = -2x + 2$$

$$-2x + 2 > 0; \quad -2x > -2; \quad x < 1$$

Por lo tanto: $f(x)$ es creciente en $(-\infty, 1)$ y decreciente en $(1, +\infty)$

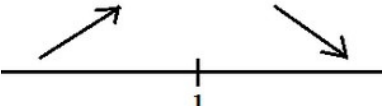
$$g(x) = x^2$$

$$g'(x) = 2x$$

$$2x > 0; \quad x > 0$$

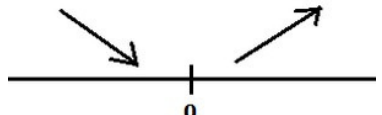
Por lo tanto $g(x)$ es creciente en $(0, +\infty)$ y decreciente en $(-\infty, 0)$

b) De lo obtenido en el apartado anterior:

De $f(x)$ sabemos:  luego $f(x)$ tiene un máximo relativo en $x = 1$

$$\text{Para } x = 1, f(1) = -1^2 + 2 \cdot 1 = -1 + 2 = 1$$

$f(x)$ tiene un máximo relativo en $(1, 1)$

De $g(x)$ sabemos:  luego $g(x)$ tiene un mínimo relativo en $x = 0$

$$\text{Para } x = 0, g(0) = 0^2 = 0$$

$g(x)$ tiene un mínimo relativo en $(0, 0)$

c) Resolvemos la ecuación: $-x^2 + 2x = x^2$; $-2x^2 + 2x = 0$; $2x(-x + 1) = 0$;

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x = 0 \rightarrow x = 0 \\ -x + 1 = 0 \rightarrow x = 1 \end{array} \right.$$

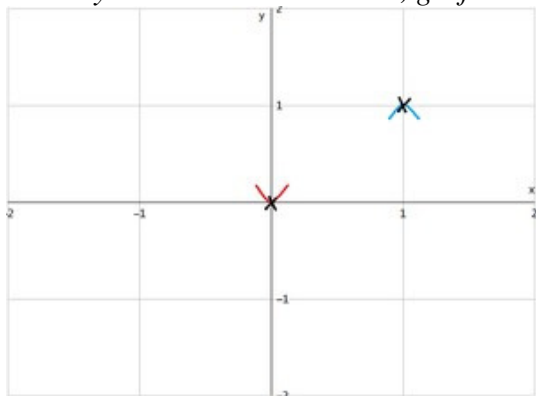
$$\text{Para } x = 0, g(0) = 0^2 = 0$$

$$x = 1, g(1) = 1^2 = 1$$

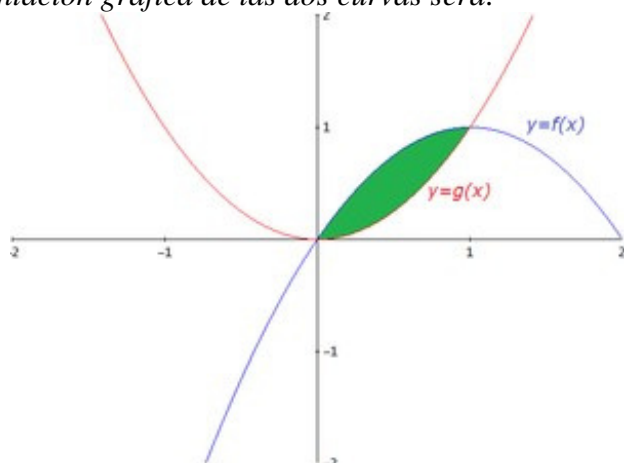
Los puntos de corte entre las dos curvas indicadas son: $(0, 0)$ y $(1, 1)$

d) Para calcular el área pedida representamos las dos curvas indicadas.

De lo estudiado en los apartados anteriores de las curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ conocemos: los puntos de corte entre ambas y sus extremos relativos, gráficamente:



La representación gráfica de las dos curvas será:



Del enunciado del problema, de la representación gráfica anterior sólo debemos considerar las funciones para valores de x entre 0 y 1. El área a calcular es la sombreada. Y el cálculo de esta área es:

$$\begin{aligned}\int_0^1 (f(x) - g(x)) dx &= \int_0^1 (-x^2 + 2x - x^2) dx = \int_0^1 (-2x^2 + 2x) dx = \left[-\frac{2x^3}{3} + x^2 \right]_0^1 = \\ &= \left(-\frac{2 \cdot 1^3}{3} + 1^2 \right) - \left(-\frac{2 \cdot 0^3}{3} + 0^2 \right) = -\frac{2}{3} + 1 = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

El área pedida mide $\frac{1}{3}$ u.a.